गणित

कक्षा 8 के लिए पाठ्यपुस्तक

© NCERT not to be republished

0853

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

0853 – गणित
कक्षा 8 के लिए पाठ्यपुस्तक

ISBN 978-81-7450-815-7

प्रथम संस्करण
जनवरी 2008 पौष 1929

पुनर्मुद्रण
जनवरी 2009, जनवरी 2010, दिसंबर 2010, मार्च 2012, नवंबर 2013, जनवरी 2015, दिसंबर 2015, जनवरी 2017, दिसंबर 2017, जनवरी 2019, अगस्त 2019, जुलाई 2021 और नवंबर 2021

संशोधित संस्करण
दिसंबर 2022 अग्रहायण 1944

पुनर्मुद्रण
मार्च 2024 चैत्र 1946

PD 25T SU

© राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, 2008, 2022

₹ 65.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नयी दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा वर्क स्टेशन सिस्टम (प्रा.) लि., प्लॉट नं. 35, सैक्टर-एच, इंडस्ट्रियल एरिया, गोविन्दपुरा, भोपाल – 462 023 (म.प्र.) द्वारा मुद्रित।

सर्वाधिकार सुरक्षित

- प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस प्रकाशन के किसी भाग को छापना तथा इलेक्ट्रॉनिकी, मशीनी, फोटोप्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग अथवा किसी अन्य विधि से पुन: प्रयोग पद्धति द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रसारण वर्जित है।
- इस पुस्तक की बिक्री इस शर्त के साथ की गई है कि प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण अथवा जिल्द के अलावा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी पर, पुनर्विक्रय या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाएगी।
- इस प्रकाशन का सही मूल्य इस पृष्ठ पर मुद्रित है। रबड़ की मुहर अथवा चिपकाई गई पर्ची (स्टिकर) या किसी अन्य विधि द्वारा अंकित कोई भी संशोधित मूल्य गलत है तथा मान्य नहीं होगा।

एन सी ई आर टी के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नयी दिल्ली 110 016 फोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बेंगलुरु 560 085 फोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप पनिहटी
कोलकाता 700 114 फोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781021 फोन : 0361-2674869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग	: *अनूप कुमार राजपूत*
मुख्य संपादक	: *श्वेता उप्पल*
मुख्य उत्पादन अधिकारी	: *अरुण चितकारा*
मुख्य व्यापार प्रबंधक (प्रभारी)	: *अमिताभ कुमार*
संपादक	: *रेखा अग्रवाल*
उत्पादन अधिकारी	: *अतुल सक्सेना*

आवरण
श्वेता राव

रूप सज्जा
डिजिटल एक्सप्रेशंस

चित्र
प्रशांत सोनी

© NCERT not to be republished

आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धांत किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाए हुए है। नयी राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास है। इस प्रयास में हर विषय को एक मज़बूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केंद्रित व्यवस्था की दिशा में काफ़ी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभव पर विचार करने का अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नए ज्ञान का सृजन कर सकते हैं। शिक्षा के विविध साधनों एवं स्रोतों की अनदेखी किए जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिए ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक ज़िंदगी और कार्यशैली में काफ़ी फेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है, जितना वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिए नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिए उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिए बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् इस पाठ्यपुस्तक के सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रोफ़ेसर जयंत विष्णु नारलीकर और इस पुस्तक के सलाहकार डॉ. हृदयकांत दीवान की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान दिया; इस योगदान को संभव बनाने के लिए हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। हम, विशेष रूप से माध्यमिक एवं उच्चतर शिक्षा विभाग, मानव संसाधन विकास मंत्रालय द्वारा प्रो. मृणाल मिरी और प्रो. जी.पी. देशपांडे की अध्यक्षता में गठित, राष्ट्रीय मानीटरिंग समिति द्वारा प्रदत्त बहुमूल्य समय एवं योगदान के लिए कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरंतर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद्

नयी दिल्ली
30 नवंबर 2007

© NCERT not to be republished

पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन

कोविड-19 महामारी को देखते हुए, विद्यार्थियों के ऊपर से पाठ्य सामग्री का बोझ कम करना अनिवार्य है। *राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 2020* में भी विद्यार्थियों के लिए पाठ्य सामग्री का बोझ कम करने और रचनात्मक नज़रिए से अनुभवात्मक अधिगम के अवसर प्रदान करने पर ज़ोर दिया गया है। इस पृष्ठभूमि में, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने सभी कक्षाओं में पाठ्यपुस्तकों को पुनर्संयोजित करने की शुरुआत की है। इस प्रक्रिया में रा.शै.अ.प्र.प. द्वारा पहले से ही विकसित कक्षावार सीखने के प्रतिफलों को ध्यान में रखा गया है।

पाठ्य सामग्रियों के पुनर्संयोजन में निम्नलिखित बिंदुओं को ध्यान में रखा गया है—

- एक ही कक्षा में अलग-अलग विषयों के अंतर्गत समान पाठ्य सामग्री का होना;
- एक कक्षा के किसी विषय में उससे निचली कक्षा या ऊपर की कक्षा में समान पाठ्य सामग्री का होना;
- कठिनाई स्तर;
- विद्यार्थियों के लिए सहज रूप से सुलभ पाठ्य सामग्री का होना, जिसे शिक्षकों के अधिक हस्तक्षेप के बिना, वे खुद से या सहपाठियों के साथ पारस्परिक रूप से सीख सकते हों;
- वर्तमान संदर्भ में अप्रासंगिक सामग्री का होना।

वर्तमान संस्करण, ऊपर दिए गए परिवर्तनों को शामिल करते हुए तैयार किया गया पुनर्संयोजित संस्करण है।

© NCERT not to be republished

© NCERT not to be republished

प्रस्तावना

प्रस्तुत पुस्तक उच्चतर प्राथमिक शृंखला की अंतिम पुस्तक है। गणित अधिगमन को भिन्न प्रकार से परिभाषित करना एक रोचक यात्रा रही है। ऐसी सामग्री की रचना करते समय, जो इस स्तर के शिक्षार्थियों की रुचि को संबोधित करे तथा उनके लिए एक पर्याप्त और सुगम्य चुनौती हो, गणित की प्रकृति को सुरक्षित करने और यह प्रश्न कि गणित क्यों पढ़ें, को सम्मिलित करने का प्रयास किया गया है। गणित के उद्देश्य पर अनेक दृष्टिकोण रहे हैं। ये दृष्टिकोण पूर्णतया उपयोगी से संपूर्णतया सौंदर्यपूर्ण या सुरुचिपूर्ण अवबोधनों तक विचरित हैं। इन दोनों का ही अंततः सार है कि अवधारणों में न उलझना तथा जीवन में प्रतिभागी बनने के लिए शिक्षार्थी को उपलब्ध उपकरणों में संवर्धन करना। NCF में विचारों और शायद अनुभवों के भी गणितीयकरण की क्षमता विकसित करने पर बल दिया गया है। वह क्षमता जिससे एक समृद्ध जीवन और आसपास के परिवेश से अर्थपूर्ण संबंध ज्ञात करने के संघर्ष में गणित द्वारा प्रदान किए गए विचारों और रूपरेखा को समझने में सहायता होती है।

इसे समझना तक भी सरल नहीं है, इसको क्रियान्वित करना तो और भी अधिक कठिन है। परंतु NCF ने इसमें एक और कठिन लक्ष्य जोड़ दिया है। यह लक्ष्य है कि कक्षा में या उसके बाहर गणित करने में उस आयु के प्रत्येक व्यक्ति को संबद्ध किया जाए। यही वह उद्देश्य है जिसे हम इस शृंखला में प्रेरित करने का प्रयास करते आ रहे हैं।

इसलिए हमने बच्चों को चिंतन में व्यस्त रखने, हल की गई समस्याओं / कार्यों और उनके विचारों को तर्कसंगत रूप से स्वयं अपने नियम और परिभाषाएँ रचित करने के लिए स्थान प्रदान किया है। बल इस बात पर नहीं है कि एल्गोरिथ्मों को याद रखा जाए, जटिल अंकगणितीय समस्याओं को हल किया जाए या उपपत्तियों को याद रखा जाए, अपितु बल इस बात पर है कि यह समझना कि गणित कैसे कार्य करती है तथा उस विधि की पहचान करने में समर्थ होना है जिससे समस्याएँ हल करने की ओर अग्रसर होने में सहायता होती है।

सबसे महत्त्वपूर्ण चिंता हमारे सम्मुख यह सुनिश्चित करने की थी कि इस स्तर पर सभी विद्यार्थी गणित सीखें तथा गणित को दैनिक जीवन से संबंधित करने में विश्वस्तता अनुभव करना प्रारंभ करने लगें। हमने पुस्तक को पढ़ने में बच्चों की सहायता करने तथा प्रत्येक चरण पर जहाँ नयी अवधारणा प्रस्तुत की जाती है, उन्हें रोकने और चिंतन कराने का प्रयत्न किया है। इस पुस्तक की भयावहता को कम करने के लिए, हमने आकृतियों और आरेखों का प्रयोग किया है। ये आकृति और आरेख पाठ्यसामग्री के साथ मिलकर बच्चे को अवधारणा समझने में सहायता करते हैं। पूरी शृंखला में और इस पुस्तक में भी, हमने तकनीकी शब्दों के प्रयोग और जटिल सूत्रों से बचने का प्रयत्न किया है। हमने अनेक बातें विद्यार्थियों पर उनकी व्याख्या करने और उन्हें स्वयं अपने शब्दों में लिखने के लिए छोड़ दी हैं।

हमने एक ऐसी भाषा का प्रयोग करने का प्रयास किया है जिसे बच्चे आसानी से समझ सकें। कुछ बातों पर ध्यान आकर्षित करने के लिए विज्ञापन-संकेतों का प्रयोग करके लंबे स्पष्टीकरणों के भार को कम करने का प्रयास किया गया है। ये आकृतियाँ और पूरक, एकदिष्टता को तोड़ने तथा संदर्भ प्रदान करने का भी प्रयत्न करते हैं।

कक्षा 8 कक्षा 9 के लिए एक सेतु है, जहाँ बच्चे अधिक औपचारिक गणित करेंगे। यहाँ प्रयत्न यह किया गया है कि कुछ विचारों को ऐसे रूप में दिया जाए, जो औपचारिक बनने की ओर अग्रसर हों। उपरोक्त पुस्तक में सम्मिलित कार्यों में यह आशा की जाती है कि बच्चा ऐसी भाषा के निरंतर प्रयोग से व्यापकीकरण करे।

इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने वाले दल में अनुभवी तथा बच्चों द्वारा गणित सीखने को महत्त्व देने वाले अध्यापक सम्मिलित थे। इस दल में ऐसे भी सदस्य थे जिन्हें गणित शिक्षण-अधिगम पर अनुसंधान का अनुभव था तथा बच्चों के लिए सामग्री निर्मित करने का भी अनुभव था। इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करते समय, कक्षा 6 और 7 की पाठ्यपुस्तकों

पर प्राप्त सुझावों को ध्यान में रखा गया है। पुस्तक विकसित करने की इस प्रक्रिया में पांडुलिपि पर आयोजित समीक्षा कार्यशाला में अध्यापकों के साथ हुई चर्चाएँ भी सम्मिलित हैं।

मैं, प्रोफ़ेसर कृष्ण कुमार, *निदेशक* एन.सी.ई.आर.टी., प्रोफ़ेसर जी. रविन्द्रा, *संयुक्त निदेशक* एन.सी.ई.आर.टी. तथा प्रोफ़ेसर हुकुम सिंह, *अध्यक्ष* डी.ई.एस.एम. के प्रति अपने दल की ओर से आभार प्रकट करना चाहूँगा, जिन्होंने हमें स्वतंत्रता और पूर्ण सहायता के साथ यह कार्य करने का अवसर प्रदान किया। मैं विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रो. जे. वी. नारलीकर का भी उनके सुझावों के लिए आभारी हूँ। मैं एन.सी.ई.आर.टी. से अपने दल के सदस्यों प्रो. एस. के. सिंह गौतम और डॉ. वी.पी. सिंह तथा विशेष रूप से डॉ. आशुतोष के. वझलवार का आभारी हूँ, जिन्होंने इस कार्य का समन्वयन किया तथा संभव व्यवस्थाएँ कीं। अंत में, मुझे एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग का उसकी सहायता और सलाह के लिए तथा विद्या भवन के उन व्यक्तियों का भी, जिन्होंने इस पुस्तक के निर्माण में सहायता की, आभार प्रकट करना चाहिए। यह कहने की आवश्यकता नहीं है, परंतु मैं यह कहे बिना रह नहीं सकता कि सभी लेखकों ने एक दल की तरह कार्य किया तथा हमने एक दूसरे के विचारों और सलाह को स्वीकार किया। हमने अपनी संपूर्ण क्षमता के साथ कार्य किया है और आशा करते हैं कि हम अपने सम्मुख प्रस्तुत चुनौती के साथ कुछ न्याय कर पाए हैं।

सामग्री विकसित करने की प्रक्रिया एक सतत प्रक्रिया है और हम इस पुस्तक को और भी अधिक अच्छा बनाना चाहेंगे। इस पुस्तक पर सुझावों और टिप्पणियों का सहर्ष स्वागत किया जाएगा।

डॉ. एच. के. दीवान
मुख्य सलाहकार
पाठ्यपुस्तक विकास समिति

© NCERT not to be republished

शिक्षक के लिए दो शब्द

यह इस शृंखला की तीसरी और अंतिम पुस्तक है। यह गणित के गूढ़ सिद्धांतों एवं विचारों को समझने में विद्यार्थियों की सहायता के लिए शुरू की गई प्रक्रिया का विस्तार है। हमारे विद्यार्थियों को गणितीय विचारों से जूझने एवं उनका उपयोग सीखने के लिए तर्कसंगत आधार की आवश्यकता है जिससे वे गूढ़ रहस्यों को समझने, अभिगृहीतों के उपयोग और नए सूत्रों की रचना करने योग्य बनें। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा 2005 (NCF-2005) में उल्लेखित मुख्य बिंदु बच्चों में गणित की सहायता से व्यापक योग्यताएँ विकसित करने, जटिल परिकलनों से दूर रहने और कलन विधि से समझ पैदा करने एवं समझ का एक ढाँचा तैयार करने का सुझाव देते हैं। जैसा कि आप जानते हैं, गणितीय विचार केवल बताने से विकसित नहीं होते हैं। केवल व्याख्या करने से भी ये विचार बच्चों को समझ में नहीं आते हैं। बच्चों को अवधारणाओं की स्वयं अपनी रूपरेखा की आवश्यकता है और उन्हें एक ऐसे कक्षा-कक्ष की आवश्यकता है जहाँ पर वे अपने विचारों पर चर्चा कर सकें, अपनी समस्याओं का समाधान ढूँढ़ सकें, नयी समस्याएँ बना सकें, समस्या हल करने की अपनी विधि ढूँढ़ सकें और स्वयं अपनी परिभाषाएँ तैयार कर सकें।

जैसा कि हम पहले कह चुके हैं, बच्चों को यह सीखने में सहायता करना आवश्यक है कि वे पाठ्यपुस्तक एवं गणित से संबंधित दूसरी पुस्तकों को समझ के साथ पढ़ें। स्पष्टत: सामग्री के अध्ययन की आवश्यकता बच्चे को और अधिक गणित सीखने में सहायता करने के लिए है। कृपया कक्षा 8 में इस बात का ध्यान रखिए कि विद्यार्थियों ने क्या सीखा है और उन्हें ऐसी विषय-वस्तु पढ़ने के अधिक अवसर प्रदान कीजिए जिनमें संकेतों सहित भाषा का उपयोग किया गया हो और किसी प्रकार की अधिकता के बिना लघुता एवं संक्षिप्तता हो। इसके लिए यदि संभव है तो उन्हें दूसरी विषय-वस्तु भी पढ़ने दें। आप उनके द्वारा सीखे जा रहे भौतिक विज्ञान और रसायन विज्ञान के समीकरणों का उनके द्वारा सीखे गए गणित के विचारों के साथ संबंध स्थापित कर सकते हैं। ये विभिन्न विषयों के संदर्भ गणित के उद्देश्य एवं रूपरेखा तैयार करने में उनकी सहायता करेंगे। उन्हें तर्कसंगत तर्कों की फिर से रचना करने योग्य होने की आवश्यकता है और इन्हें दूसरे क्षेत्रों से संबंध स्थापित करते समय कुछ कारणों एवं बंधनों को समझने की आवश्यकता है। कक्षा 8 के बच्चों को इन सभी के लिए अवसर प्रदान करने की आवश्यकता है।

जैसा कि हम पहले ही ज़ोर देकर कह चुके हैं कि उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित गूढ़ होने के साथ-साथ बच्चे के अनुभव और वातावरण के अनुरूप होना चाहिए। विषय की सुलभता और उसके अनुभव से जुड़े मॉडलों (प्रतिरूपों) से उसे विचारों पर कार्य करने के लिए आगे बढ़ने की आवश्यकता है। गूढ़ तथ्यों की समझ तर्क-वितर्कों को समझने और उन्हें सूत्र रूप में वर्णित करने में सहायता करती है। अवधारणाओं के बीच परस्पर संबंधों को देखने का सामर्थ्य दूसरे विषयों में भी प्रश्नों के उत्तर देने में सहायता करता है। यह अधिक अच्छे प्रतिरूप एवं मानचित्र बनाने में, क्षेत्रफल एवं घन का मान करने में और आकारों एवं मापों में समानता देखने और समझने में हमारी सहायता करता है। यद्यपि यह बात दूसरे क्षेत्रों के ज्ञान के गणित के साथ संबंध के बारे में है, फिर भी हमारे वातावरण और जीवन में इसके अर्थ पर पुन: ज़ोर देने की आवश्यकता है।

बच्चे प्रासंगिक स्थितियों में उपयोग किए जाने वाले सिद्धांतों को पहचानने योग्य बनने के लिए समस्याओं के समाधान के लिए प्रथम चरण के रूप में समस्या का सूक्ष्म परीक्षण करने एवं समस्या के अनुरूप सूचना चुनने के योग्य बनने चाहिए। एक बार विद्यार्थी यह योग्यता प्राप्त कर लें, उसके बाद उन्हें अपने ज्ञान का उपयोग करने की विधि ढूँढ़ने और समस्या की आवश्यकतानुसार उसका हल ढूँढ़ने के योग्य बनने की आवश्यकता है। उन्हें एक समस्या को पहचानने और

उसे परिभाषित करने, संभावित हल तैयार करने और यदि आवश्यक हो तो इन चरणों को फिर से दोहराने अथवा तैयार करने की आवश्यकता है। जैसे-जैसे वे आगे बढ़ेंगे, उनका कार्य अधिक व्यापक होगा। कक्षा 8 में उनको हमें उनके द्वारा अनुसरण किए जाने वाले चरणों के बारे में सचेत रखना है। बच्चों में समस्या को विभिन्न भागों में बाँटकर उचित मॉडल तैयार करने की योग्यता विकसित करने में, स्वयं अपनी व्यूह रचना विकसित करने में एवं समस्या का विश्लेषण करने में सहायता करना अत्यंत आवश्यक है। यह कार्य किसी समस्या के समाधान के लिए नियमानुसार कलन विधि बताने के स्थान पर किया जाता है। गणित को सीखना केवल विधियों अथवा हलों को याद करना नहीं है बल्कि यह जानना भी है कि समस्या का समाधान कैसे किया जाए और समस्या के हल के लिए रुचिकर स्थितियों का निर्माण करने के योग्य कैसे बना जाए।

सहयोगात्मक अधिगम, बातचीत के माध्यम से अधिगम, एक दूसरे से सीखने की इच्छा एवं क्षमता और यह स्वीकार कर लेना कि बातचीत, शोर नहीं है और परामर्श करना किसी प्रकार का धोखा नहीं है, अध्यापक के रूप में आपकी और विद्यार्थियों की भी, सोच में परिवर्तन का एक महत्त्वपूर्ण अंग है। विद्यार्थियों को उनके स्वयं के अनुभवों के प्रसंगों से उदाहरणों में सम्मिलित करते हुए सामूहिक प्रस्तुतीकरण के लिए प्रोत्साहित करना चाहिए। उनको सामूहिक रूप से पुस्तक पढ़ने के लिए और जो कुछ उन्होंने पुस्तक से समझा है उसे व्यक्त करने के लिए एवं सूत्र रूप में वर्णित करने के लिए उत्साहित करना चाहिए। मूल्यांकन पद्धति में भी इस कार्य की पहचान और मान होना चाहिए एवं कक्षा को इस प्रकार समूहों में विभाजित करना चाहिए जिससे कि सभी बच्चे एक दूसरे के साथ रहकर मौज-मस्ती से और समूह के अधिगम में अपना योगदान करें। जैसा कि आपने देखा होगा विभिन्न समूह विभिन्न व्यूह रचनाओं का उपयोग करते हैं। जब वे अपने मॉडलों एवं विचारों का उल्लेख करते हैं तो उनमें से कुछ उतने अधिक प्रभावशाली नहीं होते जितने कि दूसरे होते हैं। ये सभी उपयुक्त हैं और बच्चों के साथ इनका विश्लेषण किए जाने की आवश्यकता है। विभिन्न व्यूह रचनाओं का प्रदर्शन गणितीय समझ को गहरा करता है। प्रत्येक समूह अपनी एक स्थिति से शुरू करता है और उसे इसके लिए अवसर प्रदान किए जाने की आवश्यकता है।

गणित अधिगम के मुख्य विचारों को संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत किया जा रहा है और हम चाहेंगे कि आप अपने कक्षा-कक्ष में इनका ध्यान रखें।

1. समझने के लिए जाँच-पड़ताल करना एक स्वाभाविक विधि है जिसकी सहायता से विद्यार्थी ज्ञान अर्जित करते हैं और उसकी रचना करते हैं। इस विधि से ज्ञान प्राप्त करने के लिए अनेक प्रेक्षणों का उपयोग करना पड़ सकता है। विद्यार्थियों को विभिन्न प्रकार के प्रश्नों के उत्तर देने एवं चुनौतीपूर्ण अनुसंधान (खोजपूर्ण, विभिन्न उत्तरों वाले, प्रासंगिक और यहाँ तक कि ज्यामिति, अंकगणित और बीजीय संबंधों में त्रुटि ज्ञात करना इत्यादि) करने की आवश्यकता है।
2. बच्चों को तर्कसंगत तर्क-वितर्क देने और उनका अनुसरण करने, प्रस्तुत तर्क-वितर्कों से बाहर निकलने का रास्ता ढूँढ़ने एवं प्रमाण की आवश्यकता की समझ सीखने की आवश्यकता है। अब बच्चे औपचारिक अवस्था में प्रवेश कर चुके हैं। उन्हें सर्जनात्मकता एवं कल्पना को धारण करने और अपने गणितीय तर्कण को मौखिक एवं लिखित दोनों रूपों में कहने के लिए प्रोत्साहित करने की आवश्यकता है।
3. गणित की कक्षा में भाषा का गणित के अधिगम से संबंध स्थापित होना चाहिए। बच्चों को अपनी भाषा और अनुभवों का उपयोग करते हुए अपने विचारों के बारे में बात करनी चाहिए। उनको अपने स्वयं के शब्द एवं भाषा का उपयोग करने के लिए प्रोत्साहित करना चाहिए परंतु धीरे-धीरे औपचारिक भाषा और संकेतों का उपयोग करने के लिए भी प्रोत्साहित करना चाहिए।
4. संख्या पद्धति का परिमेय संख्याओं एवं उनके गुणधर्मों के सामान्यीकरण तक के स्तर का अध्ययन किया जा रहा है और एक ऐसी रूप-रेखा विकसित की जा रही है जिसमें पिछली सभी पद्धतियों को परिमेय संख्याओं के व्यापक रूप के उपसमुच्चय के रूप में सम्मिलित किया गया है। सामान्यीकरण को गणितीय भाषा में प्रस्तुत करना है और बच्चों को यह देखना है कि बीजगणित और इसकी भाषा अधिकतर विषय सामग्री को सूक्ष्म सांकेतिक रूप में प्रस्तुत करने में सहायता करता है।

5. पहले की तरह बच्चों से यह अपेक्षा की जानी चाहिए कि वे अधिक से अधिक समस्याएँ पैदा करें और उनको हल करें। हम आशा करते हैं कि जैसे–जैसे बच्चे विभिन्न प्रकार की जटिल समस्याएँ पैदा करेंगे वैसे–वैसे अपने विचारों के प्रति उनका आत्मविश्वास बढ़ेगा।
6. कक्षा 8 की पुस्तक में गणित के विभिन्न रूपों को एक जगह लाने का प्रयास किया गया है और साधारण विधियों पर ज़ोर दिया गया है। ऐकिक विधि, अनुपात एवं समानुपात, ब्याज एवं लाभांश एक ही तर्कसंगत रूप रेखा के भाग हैं। गणित की किसी भी शाखा में अज्ञात राशि ज्ञात करने के लिए अचर एवं समीकरणों के विचार की आवश्यकता होती है।

हम आशा करते हैं कि यह पुस्तक आनंद के साथ बच्चों को गणित सीखने में सहायता करेगी और इस पुस्तक में सम्मिलित अवधारणाओं के प्रति बच्चों में आत्मविश्वास पैदा होगा। हम व्यक्तिगत एवं सामूहिक रूप से सोचने के लिए अवसर पैदा करने की अनुशंसा करते हैं।

इस पुस्तक के बारे में आपके विचारों एवं सुझावों का हम स्वागत करेंगे और आशा करते हैं कि अध्यापन के दौरान आपके द्वारा विकसित प्रश्नों एवं क्रियाकलापों को आप हमारे पास भेजेंगे ताकि उन्हें पुस्तक के अगले संस्करण में सम्मिलित किया जा सके। यह तभी संभव हो सकता है जब आप बच्चों को ध्यानपूर्वक सुनने के लिए समय निकालेंगे एवं कमियों को पहचानेंगे और उन्हें अपने विचारों को व्यक्त करने का अवसर प्रदान करेंगे।

© NCERT not to be republished

पाठ्यपुस्तक विकास समिति

अध्यक्ष, विज्ञान और गणित सलाहकार समिति

जयंत विष्णु नारलीकर, *इमिरिटस प्रोफ़ेसर, अध्यक्ष,* इंटर यूनिवर्सिटी सेंटर फॉर ॲसट्रॉनॉमि एंड ॲसट्रोफिजिक्स (IUCCA), गणेशखिंड, पुणे यूनिवर्सिटी, पुणे (महाराष्ट्र)

मुख्य सलाहकार

हृदयकांत दीवान, विद्याभवन सोसायटी, उदयपुर (राजस्थान)

मुख्य समन्वयक

हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर एवं विभागाध्यक्ष* (अवकाश प्राप्त), डी.ई.एस.एम, एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

सदस्य

अवंतिका दाम, *टी.जी.टी.*, सी.आई.ई., एक्सपेरिमेंटल स्कूल, शिक्षा विभाग, दिल्ली
अंजली गुप्ते, *अध्यापिका*, विद्या भवन पब्लिक स्कूल, उदयपुर (राजस्थान)
आर. आत्मारामन, *गणित शिक्षा सलाहकार*, टी.आई.मैट्रिक हायर सेकेंडरी स्कूल और ए.एम.टी.आई., चेन्नई (तमिलनाडु)
आशुतोष के. वझलवार, *प्रवाचक* (समन्वयक अंग्रेज़ी संस्करण), डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
एच.सी.प्रधान, *प्रोफ़ेसर,* होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र, टी.आई.एफ.आर., मुंबई (महाराष्ट्र)
के.ए.एस.एस.वी. कामेश्वर राव, *प्रवक्ता,* रीजनल इंस्टीट्यूट ऑफ एजुकेशन, श्यामला हिल्स, भोपाल (म.प्र.)
पी. भास्कर कुमार, *पी.जी.टी.*, जवाहर नवोदय विद्यालय, लेपाक्षी, ज़िला अनंतुर (आंध्र प्रदेश)
बी.सी. बस्ती, *वरिष्ठ प्रवक्ता,* रीजनल इंस्टीट्यूट ऑफ एजुकेशन, मैसूर (कर्नाटक)
महेंद्र शंकर, *प्रवक्ता* (सिलेक्शन ग्रेड) (अवकाशप्राप्त), एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
मीना श्रीमाली, *अध्यापिका,* विद्या भवन सीनियर सेकेंडरी स्कूल, उदयपुर (राजस्थान)
वी.पी.सिंह, *प्रवाचक*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
राम अवतार, *प्रोफ़ेसर* (अवकाशप्राप्त), एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
शैलेश शिराली, ऋषि वैली स्कूल, ऋषि वैली, मदनपल्ली (आंध्र प्रदेश)
सुरेश कुमार सिंह गौतम, *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
सृजाता दास, *वरिष्ठ प्रवक्ता,* एस.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
श्रद्धा अग्रवाल, *प्रिंसिपल,* फ्लोरेट्स इंटरनेशनल स्कूल, पनकी, कानपुर (उत्तर प्रदेश)

हिंदी अनुवादक

डी.आर.शर्मा, *पी.जी.टी.*, जवाहर नवोदय विद्यालय, मुँगेशपुर, दिल्ली
बी.एम.गुप्ता, *पी.जी.टी.* (अवकाशप्राप्त) एस.सी.ई.आर.टी., दिल्ली
महेंद्र शंकर, *प्रवक्ता* (सिलेक्शन ग्रेड) (अवकाशप्राप्त), एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
राजकुमार धवन, *पी.जी.टी.,पी.* ऑण्ड टी. सीनियर सेकेंडरी स्कूल, दिल्ली
संजय कुमार बोल्या, *वरिष्ठ अध्यापक*, विद्याभवन बु.मा. विद्यालय, उदयपुर

सदस्य समन्वयक

आशुतोष के. वझलवार, *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

not to be republished © NCERT

आभार

परिषद् पाठ्यपुस्तक समीक्षा के लिए आयोजित कार्यशाला में भाग लेने वाले निम्नलिखित प्रतिभागियों के बहुमूल्य योगदान के लिए हार्दिक आभार व्यक्त करती है। प्रदीप भारद्वाज, *टी.जी.टी.* (गणित), बाल स्थली पब्लिक सेकंडरी स्कूल, किरारी, नांगलोई, नयी दिल्ली; शंकर मिश्रा, *गणित शिक्षक*, डेमॉन्स्ट्रेशन मल्टीपरपस स्कूल, आर.आई.ई., भुवनेश्वर (ओडी़सा); मनोहर एम. ढोक, *सुपरवाइज़र*, एम.पी.देव स्मृति लोकांची शाला, नागपुर (महाराष्ट्र); मंजीत सिंह जांगरा, *गणित शिक्षक*, राजकीय सीनियर सेकंडरी स्कूल, सेक्टर 4/7, गुड़गाँव (हरियाणा); के बालाजी, *टी.जी.टी.* (गणित), केंद्रीय विद्यालय नं. 1, तिरुपति (आंध्र प्रदेश); माला मणी, एमिटी इंटरनेशनल स्कूल, सेक्टर-44, नोएडा; ओमलता सिंह, *टी.जी.टी.* (गणित), प्रेज़ेंटेशन कॉन्वेंट सीनियर सेकंडरी स्कूल, दिल्ली; मंजू दत्ता, आर्मी पब्लिक स्कूल, धौला कुआँ, नयी दिल्ली; निरुपमा साहनी, *टी.जी.टी.* (गणित), श्री महावीर दिगंबर जैन सीनियर सेकंडरी स्कूल, जयपुर (राजस्थान); श्री नागेश मोने, *हेडमास्टर*, कांतीलाल पुरुषोत्तम दास शाह प्रशाला, विश्रामबाग, सांगली (महाराष्ट्र); अनिल भास्कर जोशी, *सीनियर टीचर* (गणित), मनुताई कन्या शाला, तिलक रोड, अकोला (महाराष्ट्र); डॉ. सुषमा जयरथ, *प्रवाचक*, डी. डब्ल्यू. एस., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; ईश्वर चंद्र, *प्रवक्ता* (सिलेक्शन ग्रेड) (अवकाशप्राप्त), एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

परिषद्, डॉ. आर.पी. मौर्य, *प्रवाचक*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; डॉ. संजय मुद्‌गल, *प्रवक्ता*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; डॉ. टी.पी.; शर्मा, *प्रवक्ता*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली द्वारा दिए गए सुझावों और टिप्पणियों के प्रति उनका आभार व्यक्त करती है।

गणित पाठ्यपुस्तक विकास समिति की कार्यशाला के दरम्यान दिए गए योगदान के लिए परिषद् निम्न प्रतिभागियों की आभारी है : श्री दीपक मंत्री, विद्याभवन बेसिक स्कूल, उदयपुर; श्री इंदर मोहन सिंह छाबरा, वी.बी.ई.आर.सी., उदयपुर।

परिषद् हिंदी रूपांतरण के पुनरावलोकन हेतु एन.सी.ई.आर.टी. में आयोजित कार्यशाला में निम्न भागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के लिए आभारी है: अशोक कुमार गुप्ता, *पी.जी.टी.*, राजकीय सर्वोदय बाल विद्यालय, आनंदवास (लोक विहार), दिल्ली; सुरेन्द्र कुमार, *टी.जी.टी.*, राजकीय सहशिक्षा सेकंडरी स्कूल, पंजाबी बस्ती, दिल्ली; ज्योती त्यागी, *टी.जी.टी.*, शारदा सेन आर.एस.के.वी., त्रिलोकपुरी, दिल्ली; राजेंद्र कुमार पूनीवाला, यू.डी.टी., गवर्नमेंट सुभाष स्कूल फॉर एक्सेलंस, बुरहानपुर (मध्य प्रदेश); चंद्रशेखर सिंह, सनबीम एकेडमी, वाराणसी, (उत्तर प्रदेश); जी.डी. ढल, *प्रवाचक* (अवकाशप्राप्त), एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

पाठ्यपुस्तक विकास समिति की कार्यशालाओं में सुविधा एवं संसाधन प्रदान करने हेतु परिषद्, विद्या भवन सोसायटी, उदयपुर और उसके संकाय सदस्यों की आभारी है। पुस्तकालय सहायता के लिए निदेशक, सेंटर फॉर साइंस एजुकेशन एंड कम्युनिकेशन (C-SEC) दिल्ली विश्वविद्यालय के प्रति भी परिषद् आभार ज्ञापित करती है।

शैक्षिक व प्रशासनिक सहयोग के लिए परिषद् प्रोफ़ेसर हुकुम सिंह, *विभाग प्रमुख*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली की आभारी है।

परिषद् सज्जाद हैदर अंसारी, राकेश कुमार, प्रतुल वशिष्ठ *डी.टी.पी. ऑपरेटर*; अवध किशोर सिंह *कॉपी एडीटर*; अभिमनु मोहांती *प्रूफ रीडर*, एन.सी.ई.आर.टी.; दीपक कपूर *कंप्यूटर स्टेशन प्रभारी*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी; ए.पी.सी. ऑफिस एवं प्रशासन विभाग, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. एवं प्रकाशन विभाग, एन.सी.ई.आर.टी. के प्रति हार्दिक आभार ज्ञापित करती है।

© NCERT not to be republished

भारत का संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्तव्य – भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह –

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे;

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे;

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे;

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे;

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हों;

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे;

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे;

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे;

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे;

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत् प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊँचाइयों को छू सके; और

(ट) यदि माता-पिता या संरक्षक है, छह वर्ष से चौदह वर्ष तक की आयु वाले अपने, यथास्थिति, बालक या प्रतिपाल्य को शिक्षा के अवसर प्रदान करे।

© NCERT not to be republished

विषय सूची

	आमुख	*iii*
	पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन	*v*
	प्रस्तावना	*vii*
	शिक्षक के लिए दो शब्द	*ix*
अध्याय 1	परिमेय संख्याएँ	1
अध्याय 2	एक चर वाले रैखिक समीकरण	15
अध्याय 3	चतुर्भुजों को समझना	21
अध्याय 4	आँकड़ों का प्रबंधन	39
अध्याय 5	वर्ग और वर्गमूल	55
अध्याय 6	घन और घनमूल	77
अध्याय 7	राशियों की तुलना	85
अध्याय 8	बीजीय व्यंजक एवं सर्वसमिकाएँ	99
अध्याय 9	क्षेत्रमिति	111
अध्याय 10	घातांक और घात	129
अध्याय 11	सीधा और प्रतिलोम समानुपात	137
अध्याय 12	गुणनखंडन	153
अध्याय 13	आलेखों से परिचय	167
	उत्तरमाला	179
	केवल खेल के लिए	188

© NCERT not to be republished

भारत का संविधान

भाग–3 (अनुच्छेद 12–35)

(अनिवार्य शर्तों, कुछ अपवादों और युक्तियुक्त निर्बंधन के अधीन)

द्वारा प्रदत्त

मूल अधिकार

समता का अधिकार

- विधि के समक्ष एवं विधियों के समान संरक्षण;
- धर्म, मूलवंश, जाति, लिंग या जन्मस्थान के आधार पर;
- लोक नियोजन के विषय में;
- अस्पृश्यता और उपाधियों का अंत।

स्वातंत्र्य-अधिकार

- अभिव्यक्ति, सम्मेलन, संघ, संचरण, निवास और वृत्ति का स्वातंत्र्य;
- अपराधों के लिए दोष सिद्धि के संबंध में संरक्षण;
- प्राण और दैहिक स्वतंत्रता का संरक्षण;
- छः से चौदह वर्ष की आयु के बच्चों को निःशुल्क एवं अनिवार्य शिक्षा;
- कुछ दशाओं में गिरफ्तारी और निरोध से संरक्षण।

शोषण के विरुद्ध अधिकार

- मानव के दुर्व्यापार और बलात श्रम का प्रतिषेध;
- परिसंकटमय कार्यों में बालकों के नियोजन का प्रतिषेध।

धर्म की स्वतंत्रता का अधिकार

- अंतःकरण की और धर्म के अबाध रूप से मानने, आचरण और प्रचार की स्वतंत्रता;
- धार्मिक कार्यों के प्रबंध की स्वतंत्रता;
- किसी विशिष्ट धर्म की अभिवृद्धि के लिए करों के संदाय के संबंध में स्वतंत्रता;
- राज्य निधि से पूर्णतः पोषित शिक्षा संस्थाओं में धार्मिक शिक्षा या धार्मिक उपासना में उपस्थित होने के संबंध में स्वतंत्रता।

संस्कृति और शिक्षा संबंधी अधिकार

- अल्पसंख्यक-वर्गों को अपनी भाषा, लिपि या संस्कृति विषयक हितों का संरक्षण;
- अल्पसंख्यक-वर्गों द्वारा अपनी शिक्षा संस्थाओं का स्थापन और प्रशासन।

सांविधानिक उपचारों का अधिकार

- उच्चतम न्यायालय एवं उच्च न्यायालय के निर्देश या आदेश या रिट द्वारा प्रदत्त अधिकारों को प्रवर्तित कराने का उपचार।

© NCERT not to be republished

अध्याय 1

परिमेय संख्याएँ

1.1 भूमिका

गणित में हमें प्रायः साधारण समीकरण दिखाई देते हैं। उदाहरणार्थ समीकरण

$$x + 2 = 13 \quad (1)$$

को $x = 11$ के लिए हल किया जाता है क्योंकि x का यह मान इस समीकरण को संतुष्ट करता है। हल 11, एक **प्राकृत संख्या** है। दूसरी तरफ समीकरण

$$x + 5 = 5 \quad (2)$$

का हल शून्य है जो एक **पूर्ण संख्या** है। यदि हम केवल प्राकृत संख्याओं तक सीमित रहें तो समीकरण (2) को हल नहीं किया जा सकता। समीकरण (2) जैसे समीकरणों को हल करने के लिए हमने प्राकृत संख्याओं के समूह में शून्य को शामिल किया और इस नए समूह को पूर्ण संख्याओं का नाम दिया। यद्यपि

$$x + 18 = 5 \quad (3)$$

जैसे समीकरणों को हल करने के लिए पूर्ण संख्याएँ भी पर्याप्त नहीं हैं। क्या आप जानते हैं 'क्यों'? हमें संख्या -13 की आवश्यकता है जो कि पूर्ण संख्या नहीं है। इसने हमें **पूर्णांकों (धनात्मक एवं ऋणात्मक)** के बारे में सोचने के लिए प्रेरित किया। ध्यान दीजिए धनात्मक पूर्णांक प्राकृत संख्याओं के अनुरूप हैं। आप सोच सकते हैं कि सभी साधारण समीकरणों को हल करने के लिए हमारे पास उपलब्ध पूर्णांकों की सूची में पर्याप्त संख्याएँ हैं। निम्नलिखित समीकरणों के बारे में विचार करते हैं :

$$2x = 3 \quad (4)$$

$$5x + 7 = 0 \quad (5)$$

इनका हल हम पूर्णांकों में ज्ञात नहीं कर सकते (इसकी जाँच कीजिए)।

समीकरण (4) को हल करने के लिए संख्या

$\frac{3}{2}$ और समीकरण (5) को हल करने के लिए संख्या $\frac{-7}{5}$ की आवश्यकता है। इससे हम **परिमेय संख्याओं** के समूह की तरफ अग्रसर होते हैं। हम पहले ही परिमेय संख्याओं पर मूल संक्रियाएँ पढ़ चुके हैं। अभी तक हमने जितनी भी विभिन्न प्रकार की संख्याएँ पढ़ी हैं उनकी संक्रियाओं के कुछ गुणधर्म खोजने का अब हम प्रयत्न करते हैं।

© NCERT not to be republished

1.2 परिमेय संख्याओं के गुणधर्म

1.2.1 संवृत

(i) पूर्ण संख्याएँ

आइए, एक बार पुन: संक्षेप में पूर्णसंख्याओं के लिए सभी संक्रियाओं पर संवृत गुणधर्म की चर्चा करते हैं।

संक्रिया	संख्याएँ	टिप्पणी
योग	$0 + 5 = 5$, एक पूर्णसंख्या है। $4 + 7 = ...$क्या यह एक पूर्ण संख्या है? व्यापक रूप से किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं a तथा b के लिए $a + b$ एक पूर्ण संख्या है।	पूर्ण संख्याएँ योग के अंतर्गत संवृत हैं।
व्यवकलन	$5 – 7 = – 2$, जो कि एक पूर्ण संख्या नहीं है।	पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन के अंतर्गत संवृत नहीं हैं।
गुणन	$0 \times 3 = 0$, एक पूर्ण संख्या है। $3 \times 7 = ...$ क्या यह एक पूर्ण संख्या है? व्यापक रूप से यदि a तथा b कोई भी दो पूर्ण संख्याएँ हैं तो उनका गुणनफल ab एक पूर्ण संख्या है।	पूर्ण संख्याएँ गुणन के अंतर्गत संवृत हैं।
भाग	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, यह एक पूर्ण संख्या नहीं है।	पूर्ण संख्याएँ भाग के अंतर्गत संवृत नहीं हैं।

प्राकृत संख्याओं के लिए सभी चार संक्रियाओं के अंतर्गत संवृत गुण की जाँच कीजिए।

(ii) पूर्णांक

आइए, अब हम उन संक्रियाओं का स्मरण करते हैं जिनके अंतर्गत पूर्णांक संवृत हैं।

संक्रिया	संख्याएँ	टिप्पणी
योग	$– 6 + 5 = – 1$, एक पूर्णांक है। क्या $– 7 + (–5)$ एक पूर्णांक है? क्या $8 + 5$ एक पूर्णांक है ? व्यापक रूप से किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a + b$ एक पूर्णांक है।	पूर्णांक योग के अंतर्गत संवृत हैं।

© NCERT not to be republished

व्यवकलन	7 – 5 = 2, एक पूर्णांक है। क्या 5 – 7 एक पूर्णांक है ? – 6 – 8 = – 14, एक पूर्णांक है। – 6 – (– 8) = 2, एक पूर्णांक है क्या 8 – (– 6) एक पूर्णांक है ? व्यापक रूप से किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a - b$ भी एक पूर्णांक है। जाँच कीजिए कि क्या $b - a$ भी एक पूर्णांक है।	पूर्णांक व्यवकलन के अंतर्गत संवृत हैं।
गुणन	5 × 8 = 40, एक पूर्णांक है। क्या – 5 × 8 एक पूर्णांक है? – 5 × (– 8) = 40, एक पूर्णांक है। व्यापक रूप से किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a \times b$ भी एक पूर्णांक है।	पूर्णांक गुणन के अंतर्गत संवृत हैं।
भाग	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, यह एक पूर्णांक नहीं है।	पूर्णांक भाग के अंतर्गत संवृत नहीं हैं।

आपने देखा कि पूर्ण संख्याएँ योग और गुणन के अंतर्गत संवृत हैं परंतु भाग और व्यवकलन के अंतर्गत संवृत नहीं हैं। तथापि पूर्णांक योग, व्यवकलन एवं गुणन के अंतर्गत संवृत हैं लेकिन भाग के अंतर्गत संवृत नहीं हैं।

(iii) परिमेय संख्याएँ

स्मरण कीजिए कि ऐसी संख्या परिमेय संख्या कहलाती है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q **पूर्णांक** हैं तथा $q \neq 0$ है। उदाहरणार्थ $-\frac{2}{3}, \frac{6}{7}, \frac{9}{-5}$ परिमेय संख्याएँ हैं। क्योंकि संख्याएँ 0, –2, 4, $\frac{p}{q}$, के रूप में लिखी जा सकती हैं इसलिए ये भी परिमेय संख्याएँ हैं। (इसकी जाँच कीजिए।)

(a) आप जानते हैं कि परिमेय संख्याओं को कैसे जोड़ा जाता है। आइए कुछ युग्मों का योग ज्ञात करते हैं

$$\frac{3}{8}+\frac{(-5)}{7} = \frac{21+(-40)}{56} = \frac{-19}{56}$$ (एक परिमेय संख्या)

$$\frac{-3}{8}+\frac{(-4)}{5} = \frac{-15+(-32)}{40} = \ldots$$ (क्या यह एक परिमेय संख्या है?)

$$\frac{4}{7}+\frac{6}{11} = \ldots$$ (क्या यह एक परिमेय संख्या है?)

हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का योग भी एक परिमेय संख्या है। कुछ और परिमेय संख्याओं के युग्मों के लिए इसकी जाँच कीजिए। इस प्रकार हम कहते हैं कि *परिमेय संख्याएँ योग के अंतर्गत संवृत हैं। अर्थात् किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a तथा b के लिए $a + b$ भी एक परिमेय संख्या है।*

(b) क्या दो परिमेय संख्याओं का अंतर भी एक परिमेय संख्या होगा?

हम प्राप्त करते हैं, $\frac{-5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{-5 \times 3 - 2 \times 7}{21} = \frac{-29}{21}$ (एक परिमेय संख्या है?)

$\frac{5}{8} - \frac{4}{5} = \frac{25 - 32}{40} = \ldots$ (क्या यह एक परिमेय संख्या है?)

$\frac{3}{7} - \left(\frac{-8}{5}\right) = \ldots$ (क्या यह एक परिमेय संख्या है?)

परिमेय संख्याओं के कुछ और युग्मों के लिए इसकी जाँच कीजिए। इस प्रकार हम पाते हैं कि *परिमेय संख्याएँ व्यवकलन के अंतर्गत संवृत हैं। अर्थात् किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a तथा b के लिए $a - b$ भी एक परिमेय संख्या* है।

(c) आइए, अब हम दो परिमेय संख्याओं के गुणनफल की चर्चा करते हैं।

$\frac{-2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{-8}{15}; \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$ (दोनों गुणनफल परिमेय संख्याएँ हैं)

$-\frac{4}{5} \times \frac{-6}{11} = \ldots$ (क्या यह एक परिमेय संख्या है?)

परिमेय संख्याओं के कुछ और युग्म लीजिए और जाँच कीजिए कि उनका गुणनफल भी एक परिमेय संख्या है। अतः हम कह सकते हैं कि *परिमेय संख्याएँ गुणन के अंतर्गत संवृत हैं। अर्थात् किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a तथा b के लिए $a \times b$ भी एक परिमेय संख्या है।*

(d) हम नोट करते हैं कि $\frac{-5}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{-25}{6}$ (एक परिमेय संख्या है)

$\frac{2}{7} \div \frac{5}{3} = \ldots$ (क्या यह एक परिमेय संख्या है?)

$\frac{-3}{8} \div \frac{-2}{9} = \ldots$ (क्या यह एक परिमेय संख्या है?)

क्या आप कह सकते हैं कि परिमेय संख्याएँ भाग के अंतर्गत संवृत हैं? हम जानते हैं कि किसी भी परिमेय संख्या a के लिए $a \div 0$ परिभाषित नहीं है। अतः परिमेय संख्याएँ भाग के अंतर्गत संवृत नहीं हैं। तथापि, यदि हम शून्य को शामिल नहीं करें तो दूसरी सभी परिमेय संख्याओं का समूह, भाग के अंतर्गत संवृत है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

संख्याएँ	अंतर्गत संवृत हैं			
	योग के	व्यवकलन के	गुणन के	भाग के
परिमेय संख्याएँ	हाँ	हाँ	...	नहीं
पूर्णांक	...	हाँ	...	नहीं
पूर्ण संख्याएँ	...	...	हाँ	...
प्राकृत संख्याएँ	...	नहीं	...	...

1.2.2 क्रमविनिमेयता

(i) पूर्ण संख्याएँ

निम्नलिखित सारणी के रिक्त स्थानों को भरते हुए विभिन्न संक्रियाओं के अंतर्गत पूर्ण संख्याओं की क्रमविनिमेयता का स्मरण कीजिए :

संक्रिया	संख्याएँ	टिप्पणी
योग	$0 + 7 = 7 + 0 = 7$ $2 + 3 = ... + ... = ...$ किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं a तथा b के लिए $a + b = b + a$	योग क्रमविनिमेय है।
व्यवकलन(घटाना)	....	व्यवकलन क्रमविनिमेय नहीं है।
गुणन	....	गुणन क्रमविनिमेय है।
भाग	....	भाग क्रमविनिमेय नहीं है

जाँच कीजिए कि क्या प्राकृत संख्याओं के लिए भी ये संक्रियाएँ क्रम विनिमेय हैं।

(ii) पूर्णांक

निम्नलिखित सारणी के रिक्त स्थानों को भरिए और पूर्णांकों के लिए विभिन्न संक्रियाओं की क्रम विनिमेयता जाँचिए :

संक्रिया	संख्याएँ	टिप्पणी
योग	....	योग क्रमविनिमेय है।
व्यवकलन	क्या $5 - (-3) = -3 - 5$?	व्यवकलन क्रमविनिमेय नहीं है।
गुणन	....	गुणन क्रमविनिमेय है।
भाग	....	भाग क्रमविनिमेय नहीं है।

(iii) परिमेय संख्याएँ

(a) योग

आप जानते हैं कि दो परिमेय संख्याओं को कैसे जोड़ा जाता है। आइए, हम यहाँ कुछ युग्मों को जोड़ते हैं।

$$\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{1}{21} \text{ और } \frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{1}{21}$$

इसलिए, $\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)$

इसके अतिरिक्त $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\ldots$ और $\frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right)=\ldots$

क्या $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\left(\frac{-8}{3}\right)+\left(\frac{-6}{5}\right)$?

क्या $\frac{-3}{8}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\left(\frac{-3}{8}\right)$?

आप पाते हैं कि दो परिमेय संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है। हम कहते हैं कि परिमेय संख्याओं के लिए योग क्रम विनिमेय है। अर्थात् किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a तथा b के लिए $a + b = b + a$ ।

(b) व्यवकलन

क्या $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$ है?

क्या $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$ है?

आप पाएँगे कि परिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन क्रम विनिमेय नहीं है।

ध्यान दीजिए कि पूर्णांकों के लिए व्यवकलन क्रम विनिमेय नहीं है तथा पूर्णांक परिमेय संख्याएँ भी हैं। अत: व्यवकलन परिमेय संख्याओं के लिए भी क्रम विनिमेय नहीं होता है।

(c) गुणन

हम पाते हैं, $\frac{-7}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{-42}{15}=\frac{6}{5}\times\left(\frac{-7}{3}\right)$

क्या $\frac{-8}{9}\times\left(\frac{-4}{7}\right)=\frac{-4}{7}\times\left(\frac{-8}{9}\right)$ है?

ऐसे कुछ और गुणनफलों के लिए भी जाँच कीजिए।

आप पाएँगे कि *परिमेय संख्याओं के लिए गुणन क्रम विनिमेय है। व्यापक रूप से किन्हीं दो परिमेय संख्याओं* a *तथा* b *के लिए* $a \times b = b \times a$ होता है।

(d) भाग

क्या $\frac{-5}{4}\div\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\div\left(\frac{-5}{4}\right)$ है?

आप पाएँगे कि दोनों पक्षों के व्यंजक समान नहीं हैं।

इसलिए परिमेय संख्याओं के लिए भाग **क्रम विनिमेय नहीं है**।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

संख्याएँ	क्रमविनिमेय			
	योग के लिए	व्यवकलन के लिए	गुणन के लिए	भाग के लिए
परिमेय संख्याएँ	हाँ	...	...	...
पूर्णांक	...	नहीं	...	...
पूर्ण संख्याएँ	...	...	हाँ	...
प्राकृत संख्याएँ	...	...	...	नहीं

1.2.3 साहचर्यता (सहचारिता)

(i) पूर्ण संख्याएँ

निम्नलिखित सारणी के माध्यम से पूर्ण संख्याओं के लिए चार संक्रियाओं की साहचर्यता को स्मरण कीजिए।

संक्रिया	संख्याएँ	टिप्पणी
योग	....	योग साहचर्य है।
व्यवकलन	....	व्यवकलन साहचर्य नहीं है।
गुणन	क्या $7 \times (2 \times 5) = (7 \times 2) \times 5$? क्या $4 \times (6 \times 0) = (4 \times 6) \times 0$? किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं a, b तथा c के लिए $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	गुणन साहचर्य है।
भाग	....	भाग साहचर्य नहीं है।

इस सारणी को भरिए और अंतिम स्तंभ में दी गई टिप्पणियों को सत्यापित कीजिए। प्राकृत संख्याओं के लिए विभिन्न संक्रियाओं की साहचर्यता की स्वयं जाँच कीजिए।

(ii) पूर्णांक

पूर्णांकों के लिए चार संक्रियाओं की साहचर्यता निम्नलिखित सारणी से देखी जा सकती है :

संक्रिया	संख्याएँ	टिप्पणी
योग	क्या $(-2) + [3 + (-4)]$ $= [(-2) + 3)] + (-4)$ है ?	योग साहचर्य है।

	क्या $(-6) + [(-4) + (-5)]$ $= [(-6) + (-4)] + (-5)$ है? किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं a, b तथा c के लिए $a + (b + c) = (a + b) + c$	
व्यवकलन	क्या $5 - (7 - 3) = (5 - 7) - 3$ है?	व्यवकलन साहचर्य **नहीं** है।
गुणन	क्या $5 \times [(-7) \times (-8)$ $= [5 \times (-7)] \times (-8)$ है? क्या $(-4) \times [(-8) \times (-5)]$ $= [(-4) \times (-8)] \times (-5)$ है? किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं a, b तथा c के लिए $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	गुणन साहचर्य है।
भाग	क्या $[(-10) \div 2] \div (-5)$ $= (-10) \div [2 \div (-5)]$ है?	भाग साहचर्य **नहीं** है।

(iii) परिमेय संख्याएँ

(a) योग

हम पाते हैं : $\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\frac{-2}{3}+\left(\frac{-7}{30}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$

$$\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{15}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$$

इसलिए, $\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)$

ज्ञात कीजिए $\frac{-1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-4}{3}\right)\right]$ और $\left[\frac{-1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{-4}{3}\right)$

क्या ये दोनों योग समान हैं?

कुछ और परिमेय संख्याएँ लीजिए, उपर्युक्त उदाहरणों की तरह उन्हें जोड़िए और देखिए कि क्या दोनों योग समान हैं। हम पाते हैं कि *परिमेय संख्याओं के लिए योग साहचर्य है, अर्थात् किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं* a, b *तथा* c *के लिए* $a + (b + c) = (a + b) + c$ ।

(b) व्यवकलन

आप पहले से जानते हैं कि व्यवकलन पूर्णांकों के लिए सहचारी नहीं है। परिमेय संख्याओं के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

क्या $\frac{-2}{3}-\left[\frac{-4}{5}-\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{-4}{5}\right)\right]-\frac{1}{2}$ है?

स्वयं जाँच कीजिए।

परिमेय संख्याओं के लिए व्यवकलन *साहचर्य नहीं* है।

© NCERT not to be republished

(c) गुणन

आइए, हम गुणन के लिए साहचर्यता की जाँच करते हैं।

$$\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{-7}{3}\times\frac{10}{36}=\frac{-70}{108}=\frac{-35}{54}$$

$$\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}=\ldots$$

हम पाते हैं कि $\frac{-7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}$

क्या $\frac{2}{3}\times\left(\frac{-6}{7}\times\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}\right)\times\frac{4}{5}$ है?

कुछ और परिमेय संख्याएँ लीजिए और स्वयं जाँच कीजिए। हम पाते हैं कि *परिमेय संख्याओं के लिए गुणन साहचर्य है। अर्थात् किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं* a, b *तथा* c *के लिए* $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ ।

(d) भाग

याद कीजिए कि पूर्णांकों के लिए विभाजन सहचारी नहीं है। परिमेय संख्याओं के बारे में आप क्या कह सकते हैं? आइए, देखते हैं कि यदि

$$\frac{1}{2}\div\left[\frac{-1}{3}\div\frac{2}{5}\right]=\left[\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\right)\right]\div\frac{2}{5}$$ है? हम पाते हैं,

बायाँ पक्ष (L.H.S) $=\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\div\frac{2}{5}\right)$

$=\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\times\frac{5}{2}\right)$ ($\frac{2}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{5}{2}$ है)

$=\frac{1}{2}\div\left(-\frac{5}{6}\right)$

$=\ldots$

पुनः दायाँ पक्ष (R.H.S) $=\left[\frac{1}{2}\div\left(\frac{-1}{3}\right)\right]\div\frac{2}{5}$

$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{-3}{1}\right)\div\frac{2}{5}$

$=\frac{-3}{2}\div\frac{2}{5}=\ldots$

क्या L.H.S. = R.H.S. है? स्वयं जाँच कीजिए। आप पाएँगे कि परिमेय संख्याओं के लिए **भाग साहचर्य नहीं** है।

© NCERT not to be republished

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

संख्याएँ	साहचर्य			
	योग के लिए	व्यवकलन के लिए	गुणन के लिए	भाग के लिए
परिमेय संख्याएँ	...	...	...	नहीं
पूर्णांक	...	...	हाँ	..
पूर्ण संख्याएँ	हाँ	...	...	...
प्राकृत संख्याएँ	...	नहीं	...	...

उदाहरण 1 : ज्ञात कीजिए $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\left(\frac{5}{22}\right)$

हल : $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\left(\frac{5}{22}\right)$

$$=\frac{198}{462}+\left(\frac{-252}{462}\right)+\left(\frac{-176}{462}\right)+\left(\frac{105}{462}\right)$$

(नोट कीजिए कि 7, 11, 21 तथा 22 का ल.स.प. 462 है।)

$$=\frac{198-252-176+105}{462}=\frac{-125}{462}$$

हम इसे निम्नलिखित प्रकार से भी हल कर सकते हैं :

$$\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{11}\right)+\left(\frac{-8}{21}\right)+\frac{5}{22}$$

$$=\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-8}{21}\right)\right]+\left[\frac{-6}{11}+\frac{5}{22}\right]$$ (क्रम विनिमेयता और साहचर्यता के उपयोग से)

$$=\left[\frac{9+(-8)}{21}\right]+\left[\frac{-12+5}{22}\right]$$

(7 और 21 का ल.स.प. 21 है। 11 और 22 का ल.स.प. 22 है।)

$$=\frac{1}{21}+\left(\frac{-7}{22}\right)=\frac{22-147}{462}=\frac{-125}{462}$$

क्या आप सोचते हैं कि क्रमविनिमेयता और साहचर्यता के गुणधर्मों की सहायता से परिकलन आसान हो गया है?

उदाहरण 2 : ज्ञात कीजिए $\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$

हल : हमें प्राप्त है,

$$\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$= \left(-\frac{4 \times 3}{5 \times 7}\right) \times \left(\frac{15 \times (-14)}{16 \times 9}\right)$$

$$= \frac{-12}{35} \times \left(\frac{-35}{24}\right) = \frac{-12 \times (-35)}{35 \times 24} = \frac{1}{2}$$

हम इसे निम्नलिखित प्रकार से भी हल कर सकते हैं :

$$\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{-4}{5} \times \frac{15}{16}\right) \times \left[\frac{3}{7} \times \left(\frac{-14}{9}\right)\right]$$ (क्रमविनिमेयता और साहचर्यता के उपयोग से)

$$= \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

1.2.4 शून्य (0) की भूमिका

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

$2 + 0 = 0 + 2 = 2$ (शून्य को पूर्ण संख्या में जोड़ना)

$-5 + 0 = \ldots + \ldots = -5$ (शून्य को पूर्णांक में जोड़ना)

$\frac{-2}{7} + \ldots = 0 + \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{-2}{7}$ (शून्य को परिमेय संख्या में जोड़ना)

आप पहले भी इस प्रकार के योग ज्ञात कर चुके हैं।

ऐसे कुछ और योग ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं? आप पाएँगे कि जब किसी पूर्ण संख्या में शून्य जोड़ा जाता है तो योग फिर से वही पूर्ण संख्या होती है। यह तथ्य पूर्णांकों और परिमेय संख्याओं के लिए भी सत्य है।

व्यापक रूप से $a + 0 = 0 + a = a,$ (जहाँ a एक पूर्ण संख्या है)

$b + 0 = 0 + b = b,$ (जहाँ b एक पूर्णांक है)

$c + 0 = 0 + c = c,$ (जहाँ c एक परिमेय संख्या है)

परिमेय संख्याओं के योग के लिए शून्य एक तत्समक कहलाता है। यह पूर्णांकों और पूर्ण संख्याओं के लिए भी योज्य तत्समक है।

1.2.5 1 की भूमिका

हम प्राप्त करते हैं कि

$$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5 \qquad \text{(पूर्ण संख्या के साथ 1 का गुणन)}$$

$$\frac{-2}{7} \times 1 = \ldots \times \ldots = \frac{-2}{7}$$

$$\frac{3}{8} \times \ldots = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

आप क्या पाते हैं?

आप पाएँगे कि जब आप किसी भी परिमेय संख्या के साथ 1 से गुणा करते हैं तो आप उसी परिमेय संख्या को गुणनफल के रूप में पाते हैं। कुछ और परिमेय संख्याओं के लिए इसकी जाँच कीजिए। आप पाएँगे कि किसी भी परिमेय संख्या a के लिए, $a \times 1 = 1 \times a = a$ है। हम कहते हैं कि 1 *परिमेय संख्याओं के लिए गुणनात्मक तत्समक* है। क्या 1 पूर्णांकों और पूर्ण संख्याओं के लिए भी गुणनात्मक तत्समक हैं?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

यदि कोई गुणधर्म परिमेय संख्याओं के लिए सत्य है तो क्या वह गुणधर्म, पूर्णांकों, पूर्ण संख्याओं के लिए भी सत्य होगा? कौन-से गुणधर्म इनके लिए सत्य होंगे और कौन-से सत्य नहीं होंगे?

1.2.6 परिमेय संख्याओं के लिए गुणन की योग पर वितरकता

इस तथ्य को समझने के लिए परिमेय संख्याएँ $\frac{-3}{4}, \frac{2}{3}$ और $\frac{-5}{6}$ को लीजिए :

$$\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right\} = \frac{-3}{4} \times \left\{\frac{(4)+(-5)}{6}\right\}$$

$$= \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

इसके अतिरिक्त $\qquad \frac{-3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{-3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2}$

और $\qquad \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{5}{8}$

योग एवं व्यवकलन पर गुणन की वितरकता

सभी परिमेय संख्याओं a, b और c के लिए

$a\,(b + c) = ab + ac$

$a\,(b - c) = ab - ac$

इसलिए, $\qquad \left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$

अत: $\qquad \frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right\} = \left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \left(\frac{-5}{6}\right)\right)$

© NCERT not to be republished

प्रयास कीजिए

वितरकता के उपयोग से निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\left\{\frac{7}{5}\times\left(\frac{-3}{12}\right)\right\}+\left\{\frac{7}{5}\times\frac{5}{12}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{9}{16}\times\frac{4}{12}\right\}+\left\{\frac{9}{16}\times\frac{-3}{9}\right\}$

उदाहरण 3 : ज्ञात कीजिए $\frac{2}{5}\times\left(\frac{-3}{7}\right)-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}$

हल : $\frac{2}{5}\times\left(\frac{-3}{7}\right)-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\times\left(\frac{-3}{7}\right)-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}$ (क्रमविनिमेयता से)

$=\frac{2}{5}\times\left(\frac{-3}{7}\right)+\left(\frac{-3}{7}\right)\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}=\frac{-3}{7}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)-\frac{1}{14}$ (वितरकता से)

$=\frac{-3}{7}\times 1-\frac{1}{14}=\frac{-6-1}{14}=\frac{-1}{2}$

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित प्रत्येक में गुणन के अंतर्गत उपयोग किए गए गुणधर्म (गुण) का नाम लिखिए:

   (i) $\frac{-4}{5}\times 1=1\times\left(\frac{-4}{5}\right)=-\frac{4}{5}$ (ii) $-\frac{13}{17}\times\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{-2}{7}\times\left(\frac{-13}{17}\right)$

   (iii) $\frac{-19}{29}\times\frac{29}{-19}=1$

2. बताइए कौन से गुणधर्म (गुण) की सहायता से आप $\frac{1}{3}\times\left(6\times\frac{4}{3}\right)$ को $\left(\frac{1}{3}\times 6\right)\times\frac{4}{3}$ के रूप में अभिकलन करते हैं।

not to be republished © NCERT

हमने क्या चर्चा की?

1. परिमेय संख्याएँ योग व्यवकलन और गुणन की संक्रियाओं के अंतर्गत **संवृत** हैं।

2. परिमेय संख्याओं के लिए योग और गुणन की संक्रियाएँ

(i) **क्रमविनिमेय** हैं।

(ii) **साहचर्य** हैं।

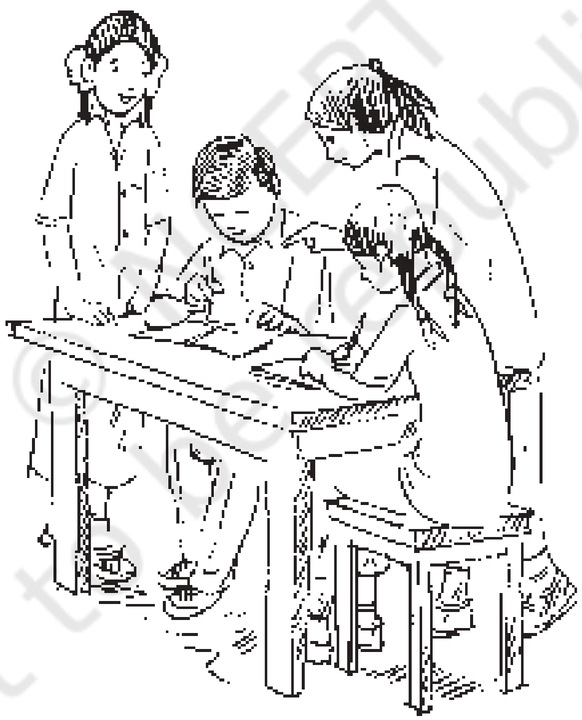
3. परिमेय संख्याओं के लिए परिमेय संख्या शून्य **योज्य तत्समक** है।

4. परिमेय संख्याओं के लिए परिमेय संख्या 1 **गुणनात्मक तत्समक** है।

5. परिमेय संख्याओं की **वितरकता :** परिमेय संख्याएँ a, b और c के लिए

$a(b + c) = ab + ac$ और $a(b - c) = ab - ac$ है।

6. दी हुई दो परिमेय संख्याओं के मध्य अपरिमित परिमेय संख्याएँ होती हैं। दो परिमेय संख्याओं के मध्य परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने में माध्य की अवधारणा सहायक है।



© NCERT not to be republished

अध्याय 2

एक चर वाले रैखिक समीकरण

0853CH02

2.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आपने अनेक **बीजीय व्यंजकों** और **समीकरणों** के बारे में जानकारी प्राप्त की है। ऐसे व्यंजक जो हमने देखे, उनके कुछ उदाहरण हैं–

$$5x,\ 2x - 3,\ 3x + y,\ 2xy + 5,\ xyz + x + y + z,\ x^2 + 1,\ y + y^2$$

समीकरणों के कुछ उदाहरण हैं: $5x = 25$, $2x - 3 = 9$, $2y + \frac{5}{2} = \frac{37}{2}$, $6z + 10 = -2$

आपको याद होगा कि समीकरणों में सदैव *समता* '=' का चिह्न प्रयोग होता है, जो व्यंजकों में नहीं होता।

इन व्यंजकों में, कुछ में एक से अधिक चर प्रयोग हुए हैं। उदाहरण के लिए, $2xy + 5$ में दो चर हैं। तथापि, हम अब समीकरण बनाने में केवल एक चर वाले व्यंजक ही प्रयोग करेंगे और जो व्यंजक समीकरण बनाने में लिखे जाएँगे वे रैखिक ही होंगे। इससे तात्पर्य है कि व्यंजकों में प्रयोग होने वाले चर की अधिकतम घात एक होगी।

कुछ रैखिक व्यंजक हैं–

$$2x,\ 2x + 1,\ 3y - 7,\ 12 - 5z,\ \frac{5}{4}(x - 4) + 10$$

ये रैखिक व्यंजक **नहीं** हैं: $x^2 + 1$, $y + y^2$, $1 + z + z^2 + z^3$

(ध्यान दीजिए चर की अधिकतम घात 1 से अधिक है)

अब हम समीकरणों में, केवल एक चर वाले व्यंजकों का ही प्रयोग करेंगे। ऐसे समीकरण, **एक चर वाले रैखिक समीकरण** कहलाते हैं। पिछली कक्षाओं में जिन सरल समीकरणों को आपने हल करना सीखा वे इसी प्रकार के थे।

आइए, जो हम जानते हैं, उसे संक्षिप्त में दोहरा लें–

(a) एक बीजीय समीकरण में चरों को प्रयोग करते हुए एक समता होती है। इसमें एक समता का चिह्न होता है। इस समता के बाईं ओर वाला व्यंजक बायाँ पक्ष (LHS) और दाईं ओर वाला व्यंजक दायाँ पक्ष (RHS) कहलाता है।

चर, समता

$2x - 3 = 7$ ← समीकरण

$2x - 3$ = बायाँ पक्ष
7 = दायाँ पक्ष

© NCERT not to be republished

(b) एक समीकरण में *बाएँ पक्ष में व्यंजक का मान, दाएँ पक्ष में व्यंजक के मान के बराबर होता है।* ऐसा, चर के कुछ मानों के लिए ही संभव होता है और चर के ऐसे मानों को ही चर के **हल** कहते हैं।

$2x - 3 = 7$. इस समीकरण का हल है– $x = 5$ क्योंकि $x = 5$ होने पर बाएँ पक्ष का मान होगा $2 \times 5 - 3 = 7$ जो दाएँ पक्ष का मान है लेकिन $x = 10$ इसका हल नहीं है, क्योंकि $x = 10$ होने पर बाएँ पक्ष का मान होगा, $2 \times 10 - 3 = 17$ जो दाएँ पक्ष के बराबर नहीं है।

(c) *किसी समीकरण का हल कैसे ज्ञात करें?*

हम मानते हैं कि समीकरण के दोनों पक्ष, तुला के पलड़ों की तरह संतुलन में हैं। अतः हम समीकरण के दोनों पक्षों पर एक जैसी ही गणितीय संक्रियाएँ करते हैं जिससे समीकरण का संतुलन बना रहे; बिगड़े नहीं, लेकिन समीकरण सरल, अधिक सरल होता जाए। इस प्रकार कुछ चरणों के बाद समीकरण का हल प्राप्त हो जाता है।

2.2 समीकरण हल करना जब दोनों ही पक्षों में चर उपस्थित हो

एक समीकरण, दो बीजीय व्यंजकों के मानों में समता होती है। समीकरण $2x - 3 = 7$ में एक व्यंजक है $2x - 3$ तथा दूसरा है 7। अभी तक लिए गए लगभग सभी उदाहरणों में दाएँ पक्ष में एक ही संख्या थी। लेकिन ऐसा होना सदैव आवश्यक नहीं है। चर राशि दोनों पक्षों में भी हो सकती है। उदाहरण के लिए, समीकरण $2x - 3 = x + 2$ में, दोनों ही पक्षों में चर वाले व्यंजक हैं। बाएँ पक्ष में व्यंजक है $(2x - 3)$ तथा दाएँ में है $(x + 2)$।

- अब हम ऐसे ही समीकरणों के हल करने की चर्चा करेंगे जिनके दोनों ही पक्षों में चर वाले व्यंजक हों।

उदाहरण 1 : हल कीजिए $2x - 3 = x + 2$

हल : दिया है: $2x - 3 = x + 2$ या $2x = x + 2 + 3$

या $2x = x + 5$

या $2x - x = x + 5 - x$ (दोनों पक्षों से x घटाने पर)

या $x = 5$ (हल)

यहाँ, हमने समीकरण के दोनों पक्षों से, एक संख्या या स्थिरांक ही नहीं, बल्कि चर वाला पद घटाया। हम ऐसा कर सकते हैं क्योंकि चर का मान भी कोई संख्या ही है। ध्यान दीजिए कि x दोनों पक्षों से घटाने से तात्पर्य है x को बाएँ पक्ष में पक्षांतरण करना।

उदाहरण 2 : हल कीजिए $5x + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}x - 14$

हल : दोनों पक्षों को 2 से गुणा करने पर प्राप्त होता है

$$2 \times \left(5x + \frac{7}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}x - 14\right)$$

या $\quad (2 \times 5x) + \left(2 \times \frac{7}{2}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2}x\right) - (2 \times 14)$

या $\quad 10x + 7 = 3x - 28$

या $\quad 10x - 3x + 7 = -28$ (3x को बाएँ पक्ष में पक्षांतरण करने पर)

या $\quad 7x + 7 = -28$

या $\quad 7x = -28 - 7$

या $\quad 7x = -35$

या $\quad x = \frac{-35}{7}$

या $\quad x = -5$ (हल)

प्रश्नावली 2.1

निम्न समीकरणों को हल कीजिए और अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

1. $3x = 2x + 18$ **2.** $5t - 3 = 3t - 5$ **3.** $5x + 9 = 5 + 3x$

4. $4z + 3 = 6 + 2z$ **5.** $2x - 1 = 14 - x$ **6.** $8x + 4 = 3(x - 1) + 7$

7. $x = \frac{4}{5}(x + 10)$ **8.** $\frac{2x}{3} + 1 = \frac{7x}{15} + 3$ **9.** $2y + \frac{5}{3} = \frac{26}{3} - y$

10. $3m = 5m - \frac{8}{5}$

2.3 समीकरणों को सरल रूप में बदलना

उदाहरण 3 : हल कीजिए : $\frac{6x+1}{3} + 1 = \frac{x-3}{6}$

> 6 से ही क्यों?
> ध्यान दीजिए हरों का ल.स.प. (L.C.M.) 6 है।

हल : दोनों पक्षों को 6 से गुणा करने पर

$$\frac{6(6x+1)}{3} + 6 \times 1 = \frac{6(x-3)}{6}$$

या $\quad 2(6x + 1) + 6 = x - 3$

या $\quad 12x + 2 + 6 = x - 3$ (कोष्ठक हटाने पर)

या $\quad 12x + 8 = x - 3$

या $\quad 12x - x + 8 = -3$

या $\quad 11x + 8 = -3$

या $\quad 11x = -3 - 8$

या $\quad 11x = -11$

या $\quad x = -1$ (वांछित हल)

© NCERT not to be republished

जाँच : बायाँ पक्ष (LHS) = $\frac{6(-1)+1}{3}+1 = \frac{-6+1}{3}+1 = \frac{-5}{3}+\frac{3}{3} = \frac{-5+3}{3} = \frac{-2}{3}$

दायाँ पक्ष (RHS) = $\frac{(-1)-3}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$

बायाँ पक्ष (LHS) = दायाँ पक्ष (RHS) (जैसा वांछित था)

उदाहरण 4 : हल कीजिए : $5x - 2\,(2x - 7) = 2\,(3x - 1) + \frac{7}{2}$

हल : कोष्ठक हटाने पर

बायाँ पक्ष (LHS) = $5x - 4x + 14 = x + 14$

दायाँ पक्ष (RHS) = $6x - 2 + \frac{7}{2} = 6x - \frac{4}{2} + \frac{7}{2} = 6x + \frac{3}{2}$

अत: समीकरण $x + 14 = 6x + \frac{3}{2}$ हुआ

या $14 = 6x - x + \frac{3}{2}$

या $14 = 5x + \frac{3}{2}$

या $14 - \frac{3}{2} = 5x$ ($\frac{3}{2}$ का पक्षांतरण करने पर)

या $\frac{28-3}{2} = 5x$

या $\frac{25}{2} = 5x$

या $x = \frac{25}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{2}$

अत: वांछित हल है $x = \frac{5}{2}$

क्या आपने ध्यान दिया कि हमने समीकरण को कैसे सरल बनाया? हमने समीकरण के दोनों पक्षों को सभी व्यंजकों के हरों के ल.स.प. से गुणा किया।

जाँच : बायाँ पक्ष (LHS) = $5 \times \frac{5}{2} - 2\left(\frac{5}{2} \times 2 - 7\right)$

$= \frac{25}{2} - 2(5-7) = \frac{25}{2} - 2(-2) = \frac{25}{2} + 4 = \frac{25+8}{2} = \frac{33}{2}$

दायाँ पक्ष (RHS) = $2\left(\frac{5}{2} \times 3 - 1\right) + \frac{7}{2}$

$= 2\left(\frac{15}{2} - \frac{2}{2}\right) + \frac{7}{2} = \frac{2 \times 13}{2} + \frac{7}{2}$

$= \frac{26+7}{2} = \frac{33}{2}$ = LHS (यथावांछित)

ध्यान दीजिए, इस उदाहरण में हमने कोष्ठकों को हटाकर और समान पदों को मिलाकर समीकरण सरल बनाया।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 2.2

निम्न रैखिक समीकरणों को हल कीजिए :

1. $\frac{x}{2}-\frac{1}{5}=\frac{x}{3}+\frac{1}{4}$

2. $\frac{n}{2}-\frac{3n}{4}+\frac{5n}{6}=21$

3. $x+7-\frac{8x}{3}=\frac{17}{6}-\frac{5x}{2}$

4. $\frac{x-5}{3}=\frac{x-3}{5}$

5. $\frac{3t-2}{4}-\frac{2t+3}{3}=\frac{2}{3}-t$

6. $m-\frac{m-1}{2}=1-\frac{m-2}{3}$

निम्न समीकरणों को सरल रूप में बदलते हुए हल कीजिए :

7. $3(t-3)=5(2t+1)$

8. $15(y-4)-2(y-9)+5(y+6)=0$

9. $3(5z-7)-2(9z-11)=4(8z-13)-17$

10. $0.25(4f-3)=0.05(10f-9)$

© NCERT not to be republished

हमने क्या चर्चा की?

1. एक बीजीय समीकरण, चरों में एक समता होती है। यह प्रकट करती है कि समता के चिह्न के एक ओर वाले व्यंजक का मान उसके दूसरी ओर वाले व्यंजक के मान के बराबर होता है।
2. कक्षा VI, VII तथा VIII में सीखे जाने वाले समीकरण, एक चर वाले रैखिक समीकरण हैं। इन समीकरणों में, समीकरण बनाने वाले व्यंजकों में एक ही चर प्रयोग होता है। इसके अतिरिक्त, ये समीकरण रैखिक होते हैं अर्थात् प्रयोग किए गए चर की अधिकतम घात 1 होती है।
3. समीकरण के दोनों पक्षों में कोई रैखिक व्यंजक हो सकते हैं। जो समीकरण हमने कक्षा VI तथा VII में सीखे, उनमें किसी एक पक्ष में केवल संख्या ही होती थी।
4. संख्याओं की भाँति ही चरों को भी एक पक्ष से दूसरे पक्ष में पक्षांतरित किया जा सकता है।
5. प्रायः समीकरण बनाने वाले व्यंजकों को, उसे हल करने से पहले, सरल बना लिया जाता है। आरंभ में कुछ समीकरण रैखिक नहीं होते। लेकिन उसके दोनों पक्षों को उपयुक्त व्यंजकों से गुणा कर रैखिक समीकरण के रूप में बदला जा सकता है।
6. रैखिक समीकरणों की उपयोगिता, उनके विविध अनुप्रयोगों में है। संख्याओं, आयु, परिमापों तथा मुद्रा के रूप में प्रयोग होने वाले सिक्के व नोटों पर आधारित अनेक प्रकार की समस्याएँ रैखिक समीकरणों का उपयोग कर हल की जा सकती हैं।

© NCERT not to be republished

अध्याय

3

चतुर्भुजों को समझना

0853CH03

© NCERT not to be republished

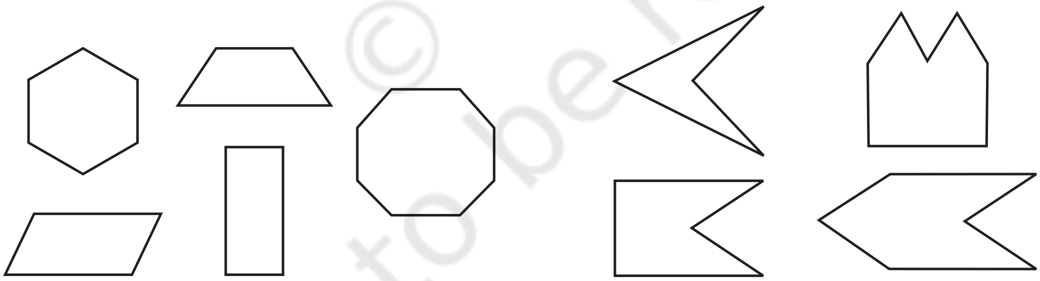
3.1 भूमिका

आप जानते हैं कि कागज़, **समतल** का एक प्रतिरूप है। जब आप कागज़ से पेंसिल को हटाए बिना बिंदुओं को आपस में जोड़ते हैं (अकेले बिंदुओं को छोड़कर आकृति के किसी भी भाग को अनुरेखित किए बिना) तो आप एक **समतलीय वक्र** प्राप्त करते हैं।

केवल रेखाखंडों से बना सरल बंद वक्र **बहुभुज** कहलाता है।

3.1.1 उत्तल और अवतल बहुभुज

यहाँ पर कुछ उत्तल (convex) बहुभुज और कुछ अवतल (cocave) बहुभुज दिए गए हैं: (आकृति 3.1)

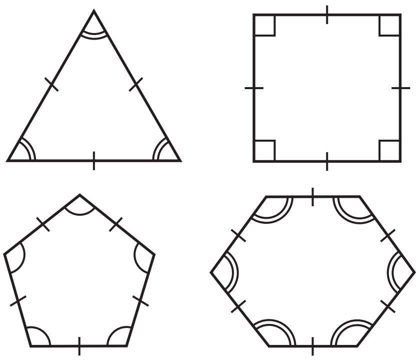


आकृति 3.1

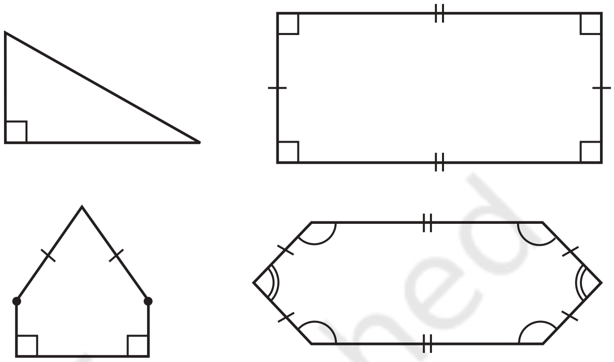
क्या आप बता सकते हैं कि इस प्रकार के बहुभुज एक दूसरे से अलग क्यों हैं? जो बहुभुज उत्तल होते हैं उनके विकर्णों का कोई भी भाग बहिर्भाग में नहीं होता है। या बहुभुज के अभ्यंतर में किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड पूर्णतया बहुभुज के अभ्यंतर में स्थित होता है। क्या यह अवतल बहुभुजों के लिए भी सत्य होता है? दी गई आकृतियों का अध्ययन कीजिए। तदुपरांत अपने शब्दों में उत्तल बहुभुज तथा अवतल बहुभुज समझाने का प्रयास कीजिए। प्रत्येक प्रकार की दो आकृतियाँ बनाइए। इस कक्षा में हम केवल उत्तल बहुभुजों के बारे में अध्ययन करेंगे।

3.1.2 सम तथा विषम बहुभुज (Regular and Irregular Polygons)

एक सम बहुभुज, समभुज तथा समकोणिक होता है। उदाहरणार्थ, एक वर्ग में भुजाएँ तथा कोण बराबर माप के होते हैं। इसलिए यह एक सम बहुभुज है। एक आयत समकोणिक तो होता है परंतु समभुज नहीं होता है। क्या एक आयत एक सम बहुभुज है? क्या एक समबाहु त्रिभुज एक सम बहुभुज है? क्यों?



सम बहुभुज (Regular polygons)



विषम बहुभुज (Irregular polygons)

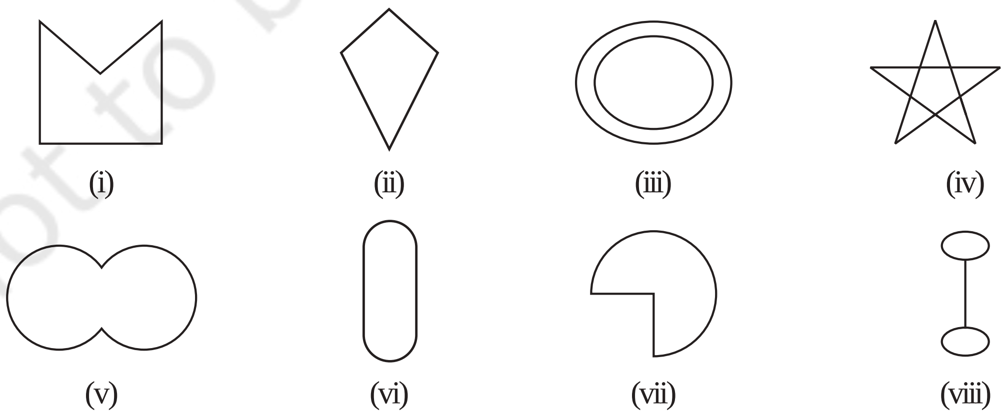
[संकेत : या का उपयोग बराबर लंबाई वाले रेखाखंडों को दर्शाता है]

पिछली कक्षाओं में, क्या आप किसी ऐसे चतुर्भुज के बारे में पढ़ा है जो समभुज तो हो परंतु समकोणिक न हो? पिछली कक्षाओं में देखे गए चतुर्भुजों की आकृतियों का स्मरण कीजिए जैसे आयत, वर्ग, सम चतुर्भुज इत्यादि।

क्या कोई ऐसा त्रिभुज है जो समभुज तो हो परंतु समकोणिक न हो?

प्रश्नावली 3.1

1. यहाँ पर कुछ आकृतियाँ दी गई हैं :



प्रत्येक का वर्गीकरण निम्नलिखित आधार पर कीजिए :

(a) साधारण वक्र (b) साधारण बंद वक्र (c) बहुभुज

(d) उत्तल बहुभुज (e) अवतल बहुभुज

© NCERT not to be republished

2. सम बहुभुज क्या है?

एक सम बहुभुज का नाम बताइए जिसमें

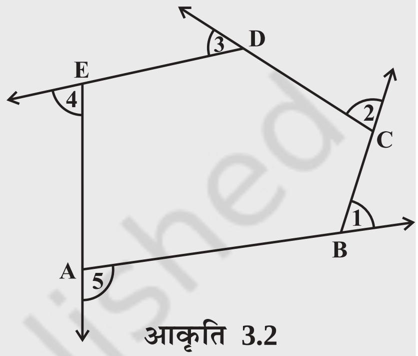
(i) 3 भुजाएँ (ii) 4 भुजाएँ (iii) 6 भुजाएँ हों।

3.2 एक बहुभुज के बाह्य कोणों की मापों का योग

कई अवसरों पर बाह्य कोणों की जानकारी अंत: कोणों और भुजाओं की प्रकृति पर प्रकाश डालती है।

इन्हें कीजिए

एक चॉक के टुकड़े से फर्श पर एक बहुभुज बनाइए। (आकृति में, एक पंचभुज ABCDE दर्शाया गया है) (आकृति 3.2)। हम सभी कोणों के मापों का योग जानना चाहते हैं, अर्थात् $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5$ है। A से आरंभ कीजिए और $\overline{AB}$ के अनुदिश चलिए। B पर पहुँचने के उपरांत, आपको कोण $m\angle 1$ पर घूमने की आवश्यकता है जिससे आप $\overline{BC}$ के अनुदिश चल सकें। C पर पहुँचने के उपरांत, $\overline{CD}$ के अनुदिश चलने के लिए आपको $m\angle 2$ पर घूमने की आवश्यकता है। आप इसी तरीके से चलना जारी रखें जब तक आप A पर नहीं पहुँच जाते। वास्तव में, इस तरह से आपने एक पूरा चक्कर घूम लिया है।



आकृति 3.2

इसलिए, $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360°$ है।

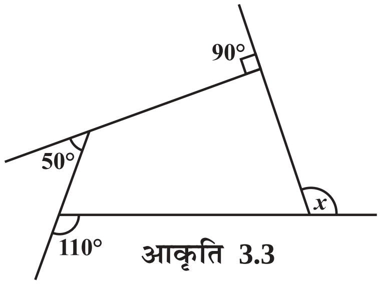
एक बहुभुज की चाहे कितनी भी भुजाएँ हों उन सबके लिए यह सही है।

अत: किसी बहुभुज के बाह्य कोणों के मापों का योग 360° होता है।

उदाहरण 1 : आकृति 3.3 में माप x ज्ञात कीजिए।

हल :

$$x + 90° + 50° + 110° = 360° \quad \text{(क्यों ?)}$$
$$x + 250° = 360°$$
$$x = 110°$$



आकृति 3.3

प्रयास कीजिए

एक सम षड्भुज लीजिए (आकृति 3.4)।

(i) बाह्य कोणों x, y, z, p, q तथा r के मापों का योग क्या है?

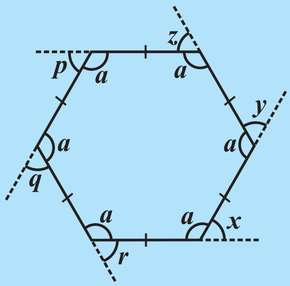
(ii) क्या $x = y = z = p = q = r$ है? क्यों?

(iii) प्रत्येक का माप क्या है?

(i) बाह्य कोण (ii) अंत: कोण

(iv) इस क्रियाकलाप को निम्नलिखित के लिए दोहराएँ

(i) एक सम अष्टभुज (ii) एक सम 20 भुज



आकृति 3.4

© NCERT not to be republished

उदाहरण 2 : एक सम बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए जिसके प्रत्येक बाह्य कोण का माप 45° है।

हल : सभी बाह्य कोणों की कुल माप = 360°

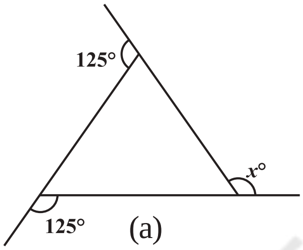
प्रत्येक बाह्य कोण का माप = 45°

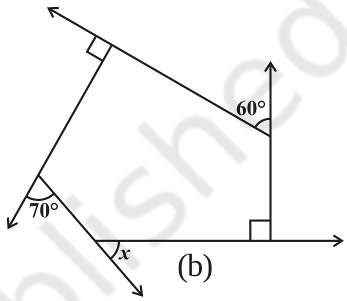
इसलिए, बाह्य कोणों की संख्या = $\frac{360}{45} = 8$

अतः बहुभुज की 8 भुजाएँ हैं।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित आकृतियों में x का मान ज्ञात कीजिए :





2. एक सम बहुभुज के प्रत्येक बाह्य कोण का माप ज्ञात कीजिए जिसकी
(i) 9 भुजाएँ (ii) 15 भुजाएँ हों।

3. एक सम बहुभुज की कितनी भुजाएँ होंगी यदि एक बाह्य कोण का माप 24° हो?

4. एक सम बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए यदि इसका प्रत्येक अंतःकोण 165° का हो?

5. (a) क्या ऐसा सम बहुभुज संभव है जिसके प्रत्येक बाह्य कोण का माप 22° हो?
(b) क्या यह किसी सम बहुभुज का अंतःकोण हो सकता है? क्यों?

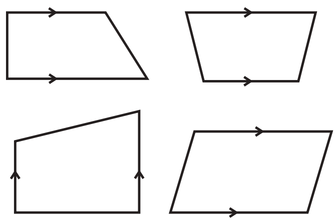
6. (a) किसी सम बहुभुज में कम से कम कितने अंश का अंतःकोण संभव है? क्यों?
(b) किसी सम बहुभुज में अधिक से अधिक कितने अंश का बाह्य कोण संभव है?

3.3 चतुर्भुजों के प्रकार

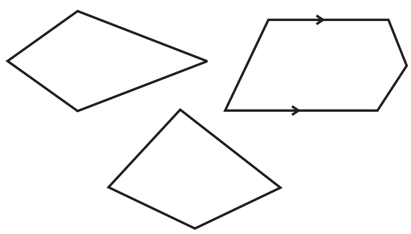
एक चतुर्भुज की भुजाओं व कोणों की प्रकृति के आधार पर इसे विशेष नाम दिए जाते हैं।

3.3.1 समलंब

समलंब एक ऐसा चतुर्भुज होता है जिसमें भुजाओं का एक युग्म समांतर होता है।



ये समलंब हैं



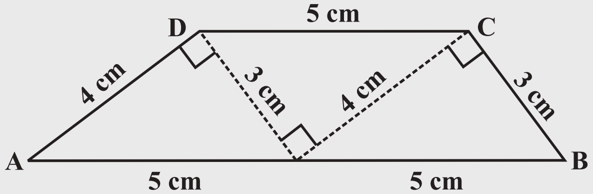
ये समलंब नहीं हैं

© NCERT not to be republished

उपरोक्त आकृतियों का अध्ययन कीजिए और अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए कि क्यों इनमें से कुछ समलंब हैं और कुछ समलंब नहीं हैं। (**संकेत :** *तीर का निशान समांतर रेखाओं को दर्शाता है।*)

इन्हें कीजिए

1. समान सर्वांगसम त्रिभुजों के कटे हुए भाग लीजिए जिनकी भुजाएँ 3 cm, 4 cm, 5 cm हैं। इन्हें व्यवस्थित कीजिए जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है (आकृति 3.5)।



आकृति 3.5

आपको एक समलंब प्राप्त होता है। (निरीक्षण कीजिए)

यहाँ पर कौन सी भुजाएँ समांतर हैं? क्या असमांतर भुजाएँ बराबर माप की होनी चाहिए?

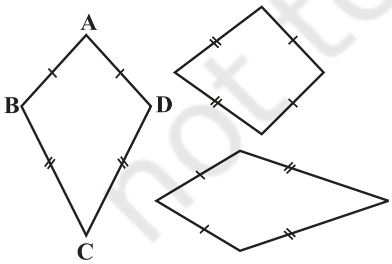
इन समान त्रिभुजों के समूह का उपयोग कर आप दो और समलंब प्राप्त कर सकते हैं। उनको ढूँढिए और उनकी आकृतियों की चर्चा कीजिए।

2. अपने तथा अपने मित्रों के ज्यामितीय बॉक्स से चार सेटस्क्वेयर लीजिए। इन्हें अलग-अलग संख्याओं में उपयोग कर साथ-साथ रखिए और अलग-अलग किस्म के समलंब प्राप्त कीजिए।

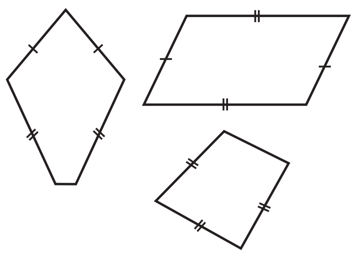
यदि समलंब की असमांतर भुजाएँ बराबर लंबाई की हों तो हम इसे समद्विबाहु समलंब कहते हैं। क्या आपने ऊपर किए गए अपने किसी निरीक्षण में कोई समद्विबाहु समलंब प्राप्त किया है?

3.3.2 पतंग

पतंग विशिष्ट प्रकार का एक चतुर्भुज है। प्रत्येक आकृति में एक जैसे चिह्न बराबर भुजाओं को दर्शाते हैं। उदाहरणार्थ AB = AD और BC = CD



ये पतंग हैं



ये पतंग नहीं हैं

इन आकृतियों का अध्ययन कीजिए और यह बताने का प्रयास कीजिए कि पतंग क्या है। निरीक्षण कीजिए कि :

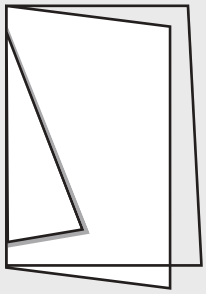
(i) एक पतंग में 4 भुजाएँ होती हैं (यह एक चतुर्भुज है)।

© NCERT not to be republished

(ii) इसमें **अलग-अलग आसन्न भुजाओं** के दो युग्म होते हैं जिनकी लंबाई बराबर होती है। जाँच कीजिए कि क्या वर्ग एक पतंग है।

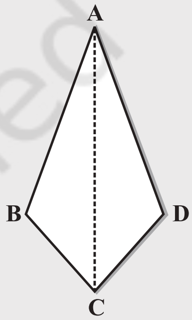
इन्हें कीजिए

एक मोटे कागज़ की शीट लीजिए।
इसे दोहरा मोड़िए।
दो अलग-अलग लंबाई वाले रेखाखंडों को खींचिए जैसाकि आकृति 3.6 में दर्शाया गया है।
इन रेखाखंडों के अनुदिश काटकर खोलिए।
आपको एक पतंग की आकृति प्राप्त होती है (आकृति 3.7)।
क्या पतंग में कोई सममित रेखा है?



आकृति 3.6

दिखाइए कि ΔABC एवं ΔADC सर्वांगसम हैं। इससे आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?



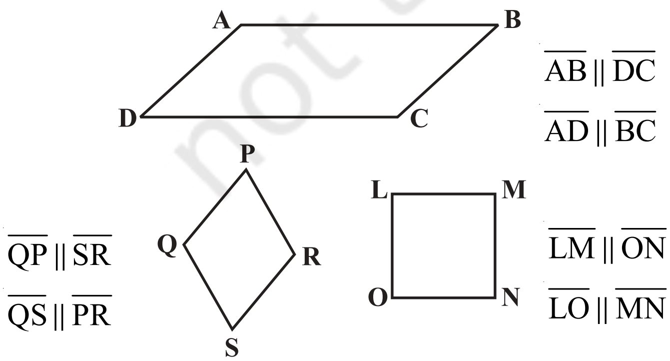
आकृति 3.7

पतंग को दोनों विकर्णों पर मोड़िए। सेट-स्क्वेयर के उपयोग से जाँचिए कि क्या वे एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं। क्या विकर्ण बराबर लंबाई के हैं?
जाँचिए (पेपर को मोड़ने या मापने द्वारा) कि क्या विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं?
पतंग के एक कोण को एक विकर्ण के अनुदिश विपरीत मोड़ने पर, बराबर माप वाले कोणों को जाँचिए।
विकर्ण पर पड़ी तह का निरीक्षण कीजिए; क्या यह दर्शाता है कि विकर्ण एक कोण समद्विभाजक होता है?

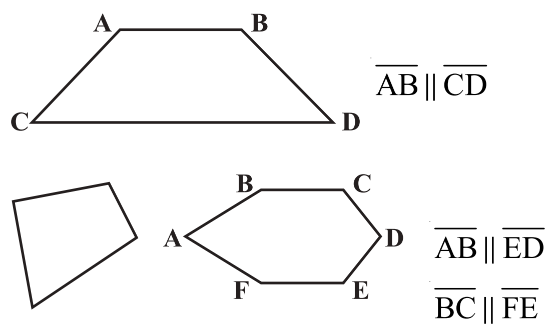
अपनी जानकारी को साथियों में बाँटिए और उनकी सूची बनाइए। इन परिणामों का सारांश अध्याय में कहीं पर आपके लिए दिया गया है।

3.3.3 समांतर चतुर्भुज

समांतर चतुर्भुज एक चतुर्भुज ही है। जैसा कि नाम संकेत करता है इसका संबंध समांतर रेखाओं से है।



ये समांतर चतुर्भुज हैं



ये समांतर चतुर्भुज नहीं हैं

© NCERT not to be republished

इन आकृतियों का अध्ययन कीजिए और अपने शब्दों में बताने का प्रयास कीजिए कि समांतर चतुर्भुज क्या है। अपने निष्कर्ष अपने मित्रों के साथ बाँटिए।
जाँच कीजिए कि क्या आयत एक समांतर चतुर्भुज है।

इन्हें कीजिए

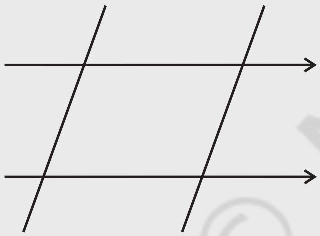
दो अलग-अलग चौड़ाई वाली गत्ते की आयताकार पट्टियाँ लीजिए (आकृति 3.8)।

आकृति 3.8

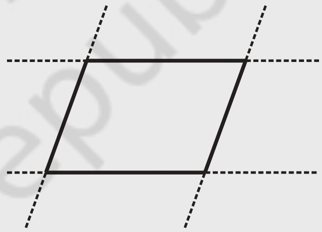
एक गत्ते की पट्टी को समतल पर रखिए और इसके किनारों के अनुदिश रेखाएँ खींचिए जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है (आकृति 3.8)।

आकृति 3.9

अब दूसरी पट्टी को खींची गई रेखाओं के ऊपर तिरछी दिशा में रखिए और इसका उपयोग करते हुए दो और रेखाओं को खींचिए जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है (आकृति 3.10)।



आकृति 3.10



आकृति 3.11

इन चार रेखाओं से बनी बंद आकृति चतुर्भुज है (आकृति 3.11)।

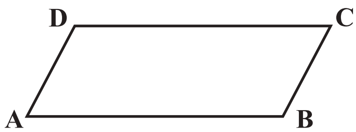
यह समांतर रेखाओं के दो युग्मों से मिलकर बनी है। यह एक समांतर चतुर्भुज है।

समांतर चतुर्भुज एक चतुर्भुज होता है जिसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं।

3.3.4 समांतर चतुर्भुज के अवयव

एक समांतर चतुर्भुज में चार भुजाएँ और चार कोण होते हैं। इनमें से कुछ बराबर माप के होते हैं। आपको इन अवयवों से संबंधित कुछ तथ्यों को याद रखने की आवश्यकता है।

एक समांतर चतुर्भुज ABCD दिया गया है (आकृति 3.12)।



आकृति 3.12

$\overline{AB}$ और $\overline{DC}$, इसकी **सम्मुख भुजाएँ** हैं। $\overline{AD}$ तथा $\overline{BC}$ सम्मुख भुजाओं का दूसरा युग्म बनाते हैं।

$\angle A$ और $\angle C$ **सम्मुख कोणों** का एक युग्म है और इसी प्रकार $\angle B$ तथा $\angle D$ सम्मुख कोणों का एक दूसरा युग्म है।

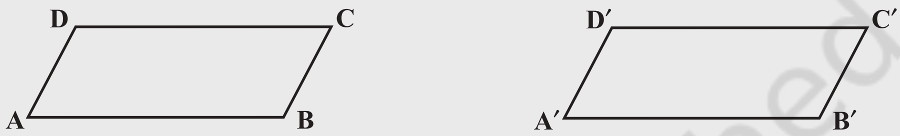
© NCERT not to be republished

$\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ समांतर चतुर्भुज की **आसन्न भुजाएँ** हैं। अर्थात् जहाँ पर एक भुजा समाप्त होती है वहीं से दूसरी भुजा प्रारंभ होती है। क्या $\overline{BC}$ और $\overline{CD}$ भी आसन्न भुजाएँ हैं? दो और आसन्न भुजाओं के युग्मों को ढूँढने का प्रयास कीजिए।

$\angle A$ और $\angle B$ समांतर चतुर्भुज के **आसन्न कोण** हैं। दोनों ही कोण उभयनिष्ठ भुजा के अंत बिंदुओं पर बने हैं। $\angle B$ तथा $\angle C$ भी आसन्न कोण हैं। समांतर चतुर्भुज के आसन्न कोणों के दूसरे युग्मों की पहचान कीजिए।

इन्हें कीजिए

दो समान समांतर चतुर्भुजों के कटे हुए भाग ABCD तथा A′B′C′D′ लीजिए (आकृति 3.13).



आकृति 3.13

यहाँ पर भुजा $\overline{AB}$, भुजा $\overline{A'B'}$ के समान है परंतु इनके नाम अलग-अलग हैं। इसी प्रकार, दूसरी संगत भुजाएँ भी समान हैं।

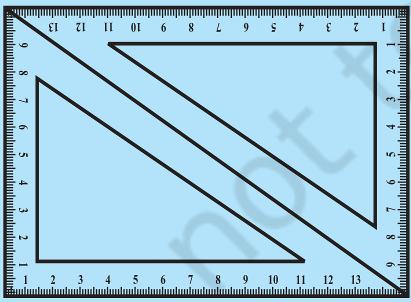
$\overline{A'B'}$ को $\overline{DC}$ के ऊपर रखिए। क्या वे एक दूसरे को पूर्णतया ढकती हैं? अब आप $\overline{AB}$ तथा $\overline{DC}$ की लंबाई के बारे में क्या कह सकते हैं?

इसी प्रकार $\overline{AD}$ तथा $\overline{BC}$ की लंबाई की जाँच कीजिए। आप क्या पाते हैं?

आप $\overline{AB}$ तथा $\overline{DC}$ को माप कर इस परिणाम पर पहुँच सकते हैं।

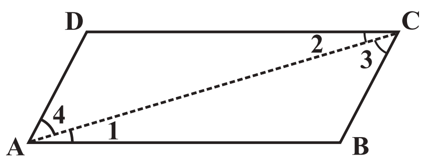
गुण : *समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर माप की होती हैं।*

प्रयास कीजिए



आकृति 3.14

30° – 60° – 90° कोणों वाले दो समान सेट-स्क्वेयर लीजिए। अब इन्हें आपस में इस प्रकार मिलाकर रखिए जिससे एक समांतर चतुर्भुज बन जाए (आकृति 3.14)। क्या यह ऊपर बताए गए गुण की पुष्टि करने में आपकी सहायता करता है?



आकृति 3.15

आप तर्क-वितर्क के द्वारा इस अवधारणा को प्रभावी बना सकते हैं। एक समांतर चतुर्भुज ABCD पर विचार कीजिए (आकृति 3.15)। एक विकर्ण, $\overline{AC}$ खींचिए।

हम देखते हैं कि $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$ (क्यों?)

© NCERT not to be republished

क्योंकि त्रिभुज ABC और ADC में $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ और $\overline{AC}$ उभयनिष्ठ है इसलिए, ASA सर्वांगसमता कसौटी द्वारा

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (यहाँ ASA कसौटी कैसे प्रयोग हुई?)

अत: $AB = DC$ और $BC = AD$.

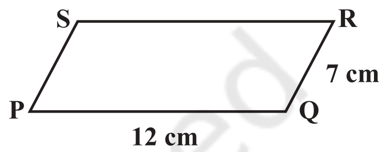
उदाहरण 3 : समांतर चतुर्भुज PQRS का परिमाप ज्ञात कीजिए (आकृति 3.16)

हल : समांतर चतुर्भुज में, सम्मुख भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं।

इसलिए, $PQ = SR = 12$ cm और $QR = PS = 7$ cm

अत: परिमाप $= PQ + QR + RS + SP$

$= 12 \text{ cm} + 7 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 7 \text{ cm} = 38 \text{ cm}$



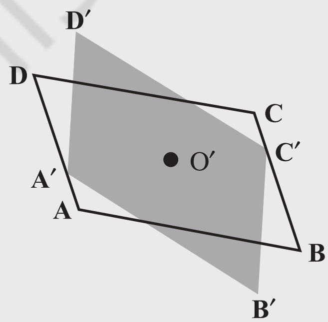
आकृति 3.16

3.3.5 समांतर चतुर्भुज के कोण

हमने समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं से संबंधित एक गुण का अध्ययन किया। हम कोणों के बारे में क्या कह सकते हैं?

इन्हें कीजिए

माना ABCD एक समांतर चतुर्भुज है (आकृति 3.17)। ट्रेसिंग शीट पर इसकी प्रतिलिपि बनाइए। इस प्रतिलिपि को A′B′C′D′ से प्रदर्शित कीजिए। A′B′C′D′ को ABCD पर आच्छादित कीजिए। दोनों चतुर्भुजों को आपस में मिलाकर उस बिंदु पर पिन लगाइए जहाँ पर उनके विकर्ण प्रतिच्छेद करते हों, ट्रेसिंग शीट को 180° घुमाइए। समांतर चतुर्भुज अभी भी एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं; परंतु अब आप देखते हैं कि A′ पूर्ण रूप से C पर और C पूर्ण रूप से B′ पर आ जाता है। इसी प्रकार B′ बिंदु D पर जाता है और विलोम रूप से भी सत्य है।



आकृति 3.17

क्या यह कोण A तथा कोण C के मापों के बारे में आपको कुछ बताता है? कोण B तथा D के मापों के लिए जाँच कीजिए। अपने निष्कर्ष की चर्चा कीजिए।

गुण : *समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर माप के होते हैं।*

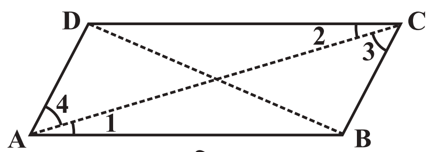
प्रयास कीजिए

30° – 60° – 90° कोणों वाले दो समान सेट-स्क्वेयर लेकर पहले की तरह ही एक समांतर चतुर्भुज बनाइए। क्या प्राप्त आकृति ऊपर बताए गए गुण की पुष्टि करने में आपकी सहायता करती है?

आप इस अवधारणा की तर्क-वितर्क के द्वारा पुष्टि कर सकते हैं।

यदि $\overline{AC}$ और $\overline{BD}$ समांतर चतुर्भुज के विकर्ण हों (आकृति 3.18) तो आप देखेंगे कि

$\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$ (क्यों?)

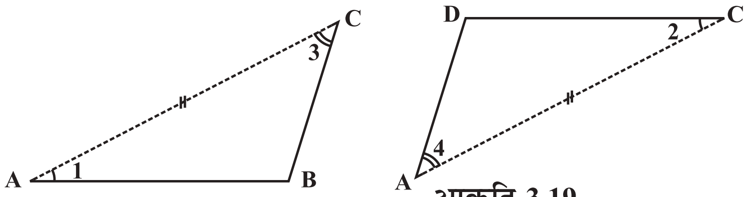


आकृति 3.18

© NCERT not to be republished

Δ ABC तथा Δ ADC का अलग-अलग अध्ययन करने पर आप देखेंगे कि (आकृति 3.19) ASA सर्वांगसम कसौटी के द्वारा

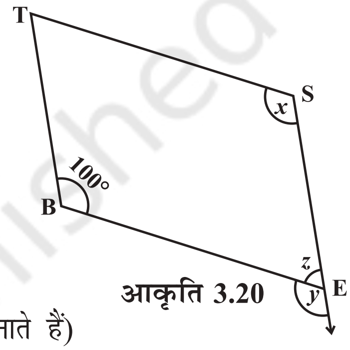
Δ ABC $\cong$ Δ CDA (कैसे?)



आकृति 3.19

यह दर्शाता है कि $\angle$B और $\angle$D समान माप के हैं। इस प्रकार आप प्राप्त करते हैं $m\angle A = m\angle C$

उदाहरण 4 : आकृति 3.20 में BEST एक समांतर चतुर्भुज है। x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 3.20

हल : बिंदु S, बिंदु B के विपरीत है।

अत: $x = 100°$ (सम्मुख कोण गुण)

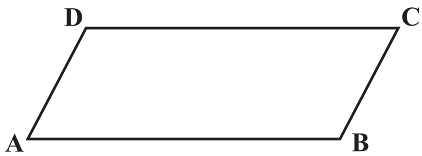
$y = 100°$ ($\angle x$ के संगत कोण का माप)

$z = 80°$ (क्योंकि $\angle y$ और $\angle z$ रैखिक युग्म बनाते हैं)

अब हम अपना ध्यान एक समांतर चतुर्भुज के आसन्न कोणों पर केंद्रित करते हैं।

समांतर चतुर्भुज ABCD में (आकृति 3.21) $\angle$A और $\angle$D संपूरक कोण हैं,

क्योंकि $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ और $\overline{DA}$, एक तिर्यक रेखा है। अत: दोनों कोण अंत: सम्मुख कोण हैं।



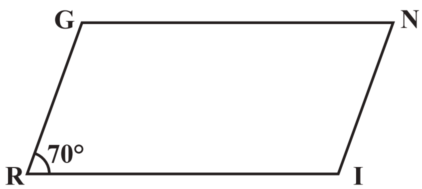
आकृति 3.21

$\angle$A और $\angle$B भी संपूरक कोण हैं। क्या आप बता सकते हैं 'क्यों'?

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ और $\overline{BA}$ एक तिर्यक रेखा है जो $\angle$A तथा $\angle$B को अंत: सम्मुख कोण बनाती है। आकृति से दो और संपूरक कोणों के युग्मों की पहचान कीजिए।

गुण : *समांतर चतुर्भुज के आसन्न कोण संपूरक होते हैं।*

उदाहरण 5 : समांतर चतुर्भुज RING में (आकृति 3.22) यदि $m\angle R = 70°$ हो तो दूसरे सभी कोण ज्ञात कीजिए।



आकृति 3.22

हल : दिया है $m\angle R = 70°$

तब $m\angle N = 70°$

क्योंकि $\angle$R तथा $\angle$I संपूरक कोण हैं

$m\angle I = 180° - 70° = 110°$

और $m\angle G = 110°$ क्योंकि $\angle$G, $\angle$I का सम्मुख कोण है।

अत: $m\angle R = m\angle N = 70°$ और $m\angle I = m\angle G = 110°$

© NCERT not to be republished

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

$m\angle R = m\angle N = 70°$, दर्शाने के उपरांत क्या आप किसी अन्य विधि से $m\angle I$ और $m\angle G$ को ज्ञात कर सकते हैं?

3.3.6 समांतर चतुर्भुज के विकर्ण

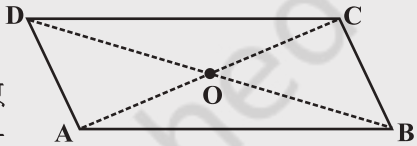
साधारणतया समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर माप के नहीं होते।

(क्या आपने अपने पूर्व क्रियाकलाप में इसे जाँचा?)

यद्यपि समांतर चतुर्भुज के विकर्णों में एक रोचक गुण होता है।

इन्हें कीजिए

समांतर चतुर्भुज, (मान लीजिए ABCD,) का एक कटा हुआ भाग लीजिए (आकृति 3.23)। माना इसके विकर्ण $\overline{AC}$ तथा $\overline{DB}$ एक दूसरे को 'O' पर प्रतिच्छेद करते हैं।



आकृति 3.23

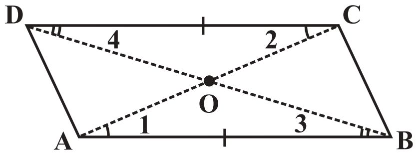
C को A पर रखकर एक तह (Fold) के द्वारा $\overline{AC}$ का मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए। क्या मध्य बिंदु O ही है? क्या यह दर्शाता है कि विकर्ण $\overline{DB}$, विकर्ण $\overline{AC}$ को बिंदु 'O' पर समद्विभाजित करता है? अपने मित्रों के साथ इसकी चर्चा कीजिए। इस क्रियाकलाप को यह ज्ञात करने के लिए दोहराएँ कि $\overline{DB}$ का मध्य बिंदु कहाँ पर स्थित होगा।

गुण : *समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। (अवश्य ही उनके प्रतिच्छेदी बिंदु पर।)*

इस गुण का तर्क–वितर्क तथा पुष्टि करना मुश्किल नहीं है। आकृति 3.24 से, ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा बड़ी आसानी से देखा जा सकता है कि

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (यहाँ पर ASA प्रतिबंध का कैसे प्रयोग हुआ?)

अतः $AO = CO$ तथा $BO = DO$



आकृति 3.24

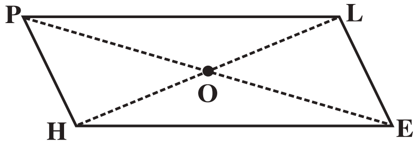
उदाहरण 6 : आकृति 3.25 में, HELP एक समांतर चतुर्भुज है। दिया है (लंबाई cm में है): OE = 4 और HL, PE से 5 अधिक है। OH ज्ञात कीजिए।

हल : यदि $OE = 4$ तब $OP = 4$ (क्यों?)

अतः: $PE = 8$, (क्यों?)

इसलिए $HL = 8 + 5 = 13$

अतः: $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ cm

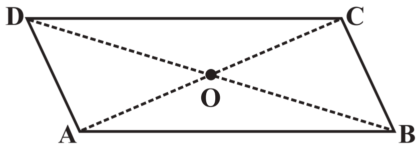


आकृति 3.25

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 3.3

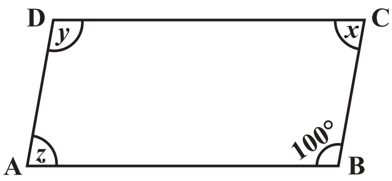
1. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। प्रत्येक कथन को परिभाषा या प्रयोग किए गए गुण द्वारा पूरा कीजिए :



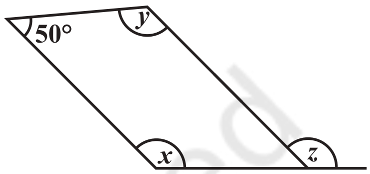
(i) AD = ... (ii) $\angle$ DCB = ...

(iii) OC = ... (iv) $m\angle DAB + m\angle CDA$ = ...

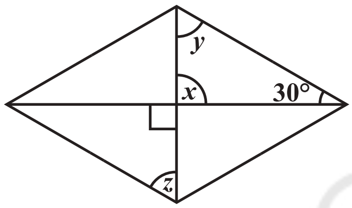
2. निम्न समांतर चतुर्भुजों में अज्ञात x, y, z के मानों को ज्ञात कीजिए :



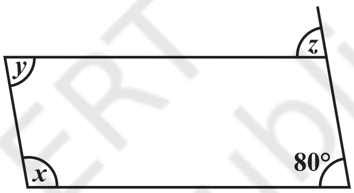
(i)



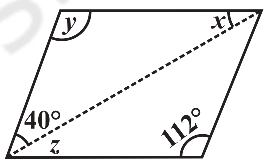
(ii)



(iii)



(iv)



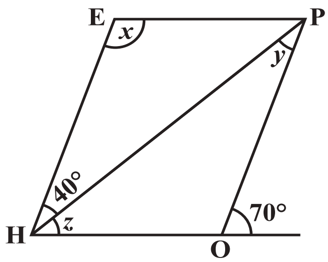
(v)

3. क्या एक चतुर्भुज ABCD समांतर चतुर्भुज हो सकता है यदि

(i) $\angle D + \angle B = 180°$? (ii) AB = DC = 8 cm, AD = 4 cm और BC = 4.4 cm?

(iii) $\angle A = 70°$ और $\angle C = 65°$?

4. एक चतुर्भुज की कच्ची (Rough) आकृति खींचिए जो समांतर चतुर्भुज न हो परंतु जिसके दो सम्मुख कोणों के माप बराबर हों।



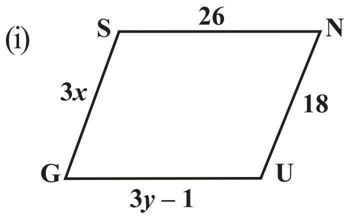
5. किसी समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न कोणों का अनुपात 3 : 2 है। समांतर चतुर्भुज के सभी कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

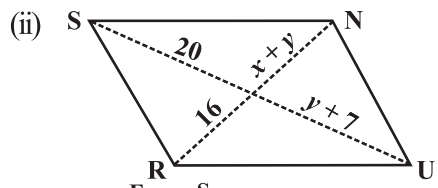
6. किसी समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न कोणों के माप बराबर हैं। समांतर चतुर्भुज के सभी कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

7. संलग्न आकृति HOPE एक समांतर चतुर्भुज है। x, y और z कोणों की माप ज्ञात कीजिए। ज्ञात करने में प्रयोग किए गए गुणों को बताइए।

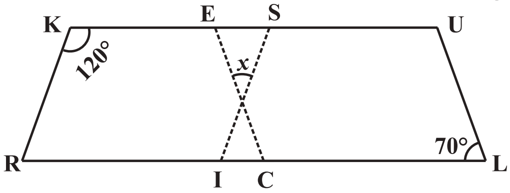
8. निम्न आकृतियाँ GUNS और RUNS समांतर चतुर्भुज हैं। x तथा y ज्ञात कीजिए (लंबाई cm में है):

© NCERT not to be republished



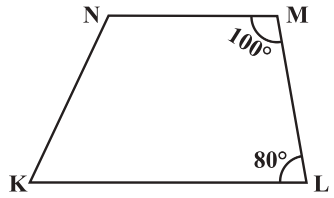


9. दी गई आकृति में RISK तथा CLUE दोनों समांतर चतुर्भुज हैं, x का मान ज्ञात कीजिए।

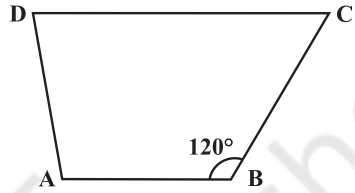


10. बताइए कैसे यह आकृति एक समलंब है। इसकी कौन सी दो भुजाएँ समांतर हैं? (आकृति 3.26)

11. आकृति 3.27 में $m\angle C$ ज्ञात कीजिए यदि $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ है।

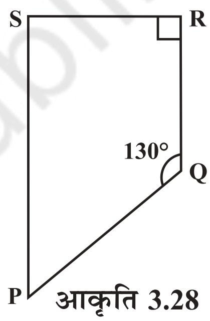


आकृति 3.26



आकृति 3.27

12. आकृति 3.28 में $\angle P$ तथा $\angle S$ की माप ज्ञात कीजिए यदि $\overline{SP} \parallel \overline{RQ}$ है। (यदि आप $m\angle R$, ज्ञात करते हैं, तो क्या $m\angle P$ को ज्ञात करने की एक से अधिक विधि है?)



आकृति 3.28

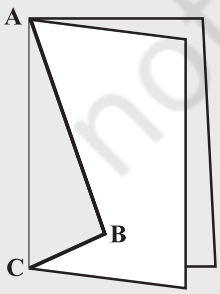
3.4 कुछ विशिष्ट समांतर चतुर्भुज

3.4.1 समचतुर्भुज

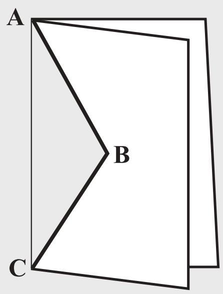
पतंग (जो कि एक समांतर चतुर्भुज नहीं है) की विशेष स्थिति के रूप में हमें एक समचतुर्भुज (Rhombus) जो एक समांतर चतुर्भुज भी है, प्राप्त होता है।

इन्हें कीजिए

आपके द्वारा कागज़ से काटकर पहले बनाई गई पतंग का स्मरण करें।



पतंग-काट (Kite-cut)



समचतुर्भुज-काट (Rhombus-cut)

© NCERT not to be republished

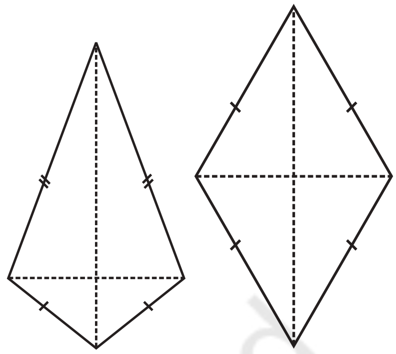
जब आप ABC के अनुदिश काटकर खोलते हैं तो आप एक पतंग प्राप्त करते हैं। यहाँ पर लंबाई AB और BC अलग-अलग थीं। यदि आप AB = BC खींचते हैं तो प्राप्त की गई पतंग एक **समचतुर्भुज कहलाता** है।

ध्यान दीजिए कि समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं परंतु पतंग की स्थिति में ऐसा नहीं है।

समचतुर्भुज एक चतुर्भुज है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं।

क्योंकि समचतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं, इसलिए यह एक समांतर चतुर्भुज भी है। अतः *एक सम चतुर्भुज में एक समांतर चतुर्भुज और एक पतंग के भी सभी गुण विद्यमान हैं।* उनकी सूची तैयार करने का प्रयास कीजिए। तब आप अपनी सूची पुस्तक में दी गई जाँच सूची के साथ मिलाकर पुष्टि कर सकते हैं। एक समचतुर्भुज का सबसे उपयोगी गुण उसके विकर्णों का है।

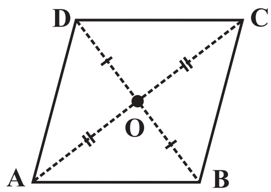
गुण : *एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब समद्विभाजक होते हैं।*



इन्हें कीजिए

सम चतुर्भुज की एक प्रतिलिपि लीजिए। पेपर को मोड़कर जाँच कीजिए कि क्या प्रतिच्छेदी बिंदु प्रत्येक विकर्ण का मध्यबिंदु है। आप एक सेट-स्क्वेयर के किनारे का उपयोग करके जाँच सकते हैं कि वे एक दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।

तर्क-पूर्ण चरणों का उपयोग कर यहाँ एक खाका दिया गया है जो इस गुण की पुष्टि करता है।



आकृति 3.29

ABCD एक समचतुर्भुज है (आकृति 3.29)। अतः यह एक समांतर चतुर्भुज भी है।

चूँकि विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं,

अतः OA = OC और OB = OD

हमें यह दर्शाना है कि $m\angle AOD = m\angle COD = 90°$ है।

SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध से यह देखा जा सकता है कि

$$\Delta AOD \cong \Delta COD$$

चूँकि AO = CO (क्यों?)
AD = CD (क्यों?)
OD = OD

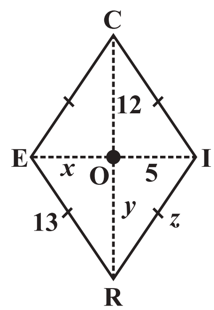
अतः $m\angle AOD = m\angle COD$

क्योंकि $\angle AOD$ और $\angle COD$ रैखिक युग्म बनाते हैं,

$$m\angle AOD = m\angle COD = 90°$$

उदाहरण 7 :

RICE एक समचतुर्भुज है (आकृति 3.30)। x, y, तथा z का मान ज्ञात कीजिए और अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।



आकृति 3.30

हल :

x = OE
= OI (विकर्ण समद्विभाजित करते हैं)
= 5

y = OR
= OC (विकर्ण समद्विभाजित करते हैं)
= 12

z = समचतुर्भुज की भुजा
= 13 (समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर माप की होती हैं)

© NCERT not to be republished

3.4.2 एक आयत

आयत एक समांतर चतुर्भुज है जिसके सभी कोण समान माप के होते हैं (आकृति 3.31)।

इस परिभाषा का पूर्ण अर्थ क्या है? इसकी चर्चा अपने मित्रों के साथ कीजिए। यदि आयत समकोणिक हो तो प्रत्येक कोण की माप क्या होगी? माना प्रत्येक कोण का माप $x°$ होगी।

आकृति 3.31

तब $4x° = 360°$ (क्यों)?

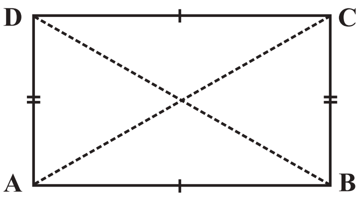
इसलिए, $x° = 90°$

अत: आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है।

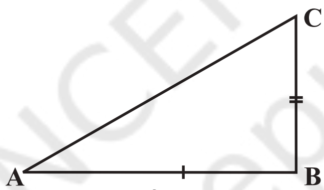
अत: एक आयत समांतर चतुर्भुज होता है जिसमें प्रत्येक कोण समकोण होता है।

एक समांतर चतुर्भुज होने के कारण आयत की सम्मुख भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं और विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। समांतर चतुर्भुज में विकर्ण अलग-अलग लंबाई के हो सकते हैं (जाँच कीजिए) : परंतु आयत (विशेष स्थिति में) के विकर्ण बराबर माप (लंबाई) के होते हैं।

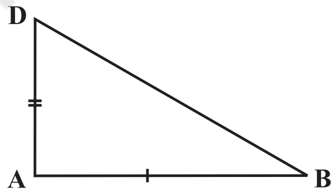
गुण : *आयत के विकर्ण बराबर लंबाई के होते हैं।*



आकृति 3.32



आकृति 3.33



आकृति 3.34

इसकी पुष्टि आसानी से हो सकती है। यदि ABCD एक आयत है (आकृति 3.32) तो त्रिभुज ABC तथा ABD को अलग-अलग (आकृति 3.33 और आकृति 3.34) देखने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$\Delta ABC \cong \Delta ABD$$

क्योंकि $AB = AB$ (उभयनिष्ठ)

$BC = AD$ (क्यों?)

$m\angle A = m\angle B = 90°$ (क्यों?)

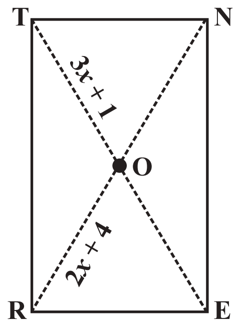
SAS प्रतिबंध से सर्वांगसमता होती है।

अत: $AC = BD$

और एक आयत में विकर्ण बराबर लंबाई के होने के अतिरिक्त एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। (क्यों?)

उदाहरण 8 : RENT एक आयत है (आकृति 3.35)। इसके विकर्ण एक दूसरे को 'O' पर प्रतिच्छेद करते हैं। x, का मान ज्ञात कीजिए यदि $OR = 2x + 4$ और $OT = 3x + 1$ हैं।

हल : $\overline{OT}$, विकर्ण $\overline{TE}$ का आधा है। $\overline{OR}$, विकर्ण $\overline{RN}$ का आधा है। यहाँ पर विकर्ण बराबर लंबाई के हैं। (क्यों?) अत: उनके आधे भी आपस में बराबर हैं।



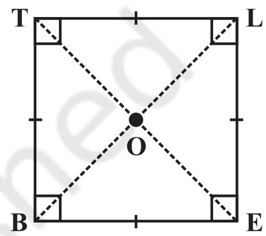
आकृति 3.35

इसलिए $\qquad 3x + 1 = 2x + 4$

अर्थात् $\qquad x = 3$

3.4.3 वर्ग

वर्ग एक आयत होता है जिसकी भुजाएँ बराबर होती हैं।
इसका मतलब यह है कि एक वर्ग में एक आयत के सभी गुण होने के साथ-साथ एक अतिरिक्त गुण भी होता है कि इसकी भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं।
वर्ग के विकर्ण, आयत के विकर्णों की तरह ही, बराबर लंबाई के होते हैं।
एक आयत में विकर्णों का एक दूसरे पर लंब होना आवश्यक नहीं होता है (जाँचिए)। किसी वर्ग में विकर्ण



(i) एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं (वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है)।

(ii) बराबर लंबाई के होते हैं। (वर्ग एक आयत है।) और

(iii) एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

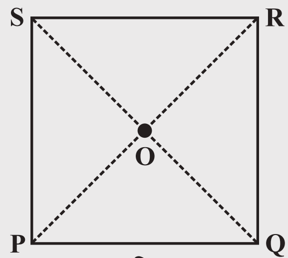
BELT एक वर्ग है जिसमें,
$BE = EL = LT = TB$
$\angle B, \angle E, \angle L$ तथा $\angle T$ समकोण हैं।
$BL = ET$ और $\overline{BL} \perp \overline{ET}$
$OB = OL$ और $OE = OT$

इस प्रकार, हमें निम्नलिखित गुणधर्म प्राप्त होता है।

गुण : *वर्ग के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।*

इन्हें कीजिए

एक वर्गाकार शीट, माना PQRS लीजिए (आकृति 3.36)।
दोनों विकर्णों के अनुदिश तह (fold) लगाइए। क्या उनके मध्य बिंदु समान ही हैं।
सेट-स्क्वेयर का उपयोग करके जाँच कीजिए, क्या 'O' पर बना कोण 90° का है। यह ऊपर बताए गए गुणधर्म को सिद्ध करता है।



आकृति 3.36

तर्क-वितर्क की सहायता से हम इसकी पुष्टि कर सकते हैं।
ABCD एक वर्ग है जिसके विकर्ण एक दूसरे को 'O' पर प्रतिच्छेद करते हैं (आकृति 3.37)।

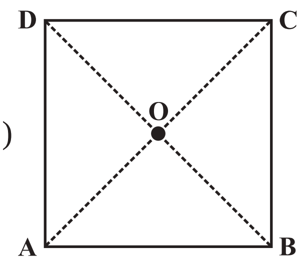
$OA = OC$ (क्योंकि वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है)

SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अनुसार

$\Delta AOD \cong \Delta COD$ (कैसे?)

अत: $m\angle AOD = m\angle COD$

ये कोण रैखिक युग्म बनाते हैं। अत: प्रत्येक कोण समकोण है।

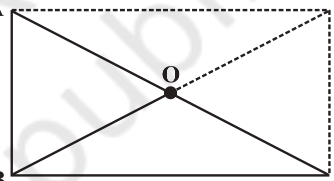


आकृति 3.37

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 3.4

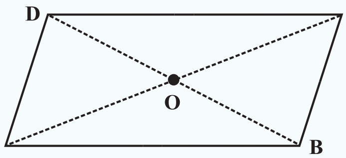
1. बताइए, कथन सत्य है या असत्य :
   - (a) सभी आयत वर्ग होते हैं
   - (b) सभी सम चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होते हैं
   - (c) सभी वर्ग सम चतुर्भुज और आयत भी होते हैं
   - (d) सभी वर्ग समांतर चतुर्भुज नहीं होते।
   - (e) सभी पतंगें सम चतुर्भुज होती हैं
   - (f) सभी सम चतुर्भुज पतंग होते हैं
   - (g) सभी समांतर चतुर्भुज समलंब होते हैं
   - (h) सभी वर्ग समलंब होते हैं।
2. उन सभी चतुर्भुजों की पहचान कीजिए जिनमें
   - (a) चारों भुजाएँ बराबर लंबाई की हों
   - (b) चार समकोण हों
3. बताइए कैसे एक वर्ग
   - (i) एक चतुर्भुज
   - (ii) एक समांतर चतुर्भुज
   - (iii) एक समचतुर्भुज
   - (iv) एक आयत है।
4. एक चतुर्भुज का नाम बताइए जिसके विकर्ण
   - (i) एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं
   - (ii) एक दूसरे पर लंब समद्विभाजक हो
   - (iii) बराबर हों।
5. बताइए एक आयत उत्तल चतुर्भुज कैसे है।
6. ABC एक समकोण त्रिभुज है और 'O' समकोण की सम्मुख भुजा का मध्य-बिंदु है। बताइए कैसे 'O' बिंदु A, B तथा C से समान दूरी पर स्थित है। (बिंदुओं से चिह्नित अतिरिक्त भुजाएँ आपकी सहायता के लिए खींची गई हैं)



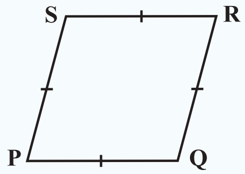
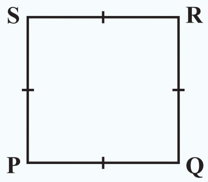
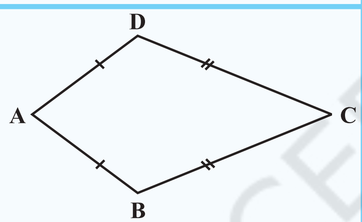
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. एक राजमिस्त्री एक पत्थर की पट्टी बनाता है। वह इसे आयताकार बनाना चाहता है। कितने अलग-अलग तरीकों से उसे यह विश्वास हो सकता है कि यह आयताकार है।
2. वर्ग को आयत के रूप में परिभाषित किया गया था जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं। क्या हम इसे समचतुर्भुज के रूप में परिभाषित कर सकते हैं जिसके कोण बराबर माप के हों? इस विचार को स्पष्ट कीजिए।
3. क्या एक समलंब के सभी कोण बराबर माप के हो सकते हैं? क्या इसकी सभी भुजाएँ बराबर हो सकती हैं? वर्णन कीजिए।

हमने क्या चर्चा की?

चतुर्भुज	गुण
समांतर चतुर्भुज : एक चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म समांतर होता है। 	(1) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं। (2) सम्मुख कोण बराबर होते हैं। (3) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

© NCERT not to be republished

समचतुर्भुज : एक चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ बराबर माप की होती हैं। 	(1) समांतर चतुर्भुज के सभी गुण होते हैं। (2) विकर्ण परस्पर लंब होते हैं।
आयत : एक समांतर चतुर्भुज जिसमें एक कोण समकोण होता है।	(1) समांतर चतुर्भुज के सभी गुण होते हैं। (2) प्रत्येक कोण समकोण होता है। (3) विकर्ण बराबर माप के होते हैं।
वर्ग : एक आयत जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं। 	समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज तथा आयत सभी के गुण होते हैं।
पतंग : एक चतुर्भुज जिसमें दो आसन्न भुजाओं के युग्म बराबर होते हैं। 	(1) विकर्ण एक दूसरे पर लंब होते हैं। (2) एक विकर्ण दूसरे विकर्ण को समद्विभाजित करता है। (3) आकृति में, $m\angle B = m\angle D$ परंतु $m\angle A \neq m\angle C$

© NCERT not to be republished

अध्याय

4

आँकड़ों का प्रबंधन

0853CH05

4.1 सूचनाओं की खोज में

आपके दैनिक जीवन में आपके सम्मुख निम्नलिखित प्रकार की सूचनाएँ आई होंगी :

(a) पिछले 10 टेस्ट मैचों में एक बल्लेबाज द्वारा बनाए गए कुल रन।

(b) पिछले 10 एक दिवसीय अंतर्राष्ट्रीय मैचों (ODI) में एक गेंदबाज द्वारा लिए गए कुल विकेट।

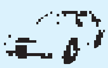
(c) आपकी कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा गणित के यूनिट टेस्ट में प्राप्त किए गए अंक।

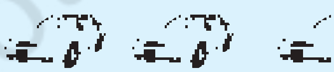
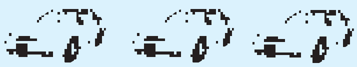
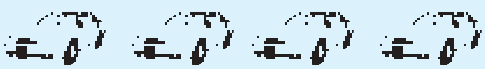
(d) आपके मित्रों में से प्रत्येक द्वारा पढ़ी गई कहानियों की पुस्तकों की संख्या, इत्यादि।

इन सभी स्थितियों में एकत्रित की गई सूचनाएँ **आँकड़े (data)** कहलाती हैं। आँकड़े प्रायः एक ऐसी स्थिति के संदर्भ में एकत्रित किए जाते हैं जिसका हम अध्ययन करना चाहते हैं। उदाहरणार्थ, एक अध्यापिका की अपनी कक्षा के विद्यार्थियों की औसत ऊँचाई जानने में रुचि हो सकती है। इसे ज्ञात करने के लिए, वह अपनी कक्षा के सभी विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ लिखेगी, इन आँकड़ों को एक क्रमबद्ध रूप से संगठित करेगी और तदनुसार उनकी व्याख्या करेगी।

कभी-कभी आँकड़ों को, यह सुस्पष्ट करने के लिए कि वे क्या निरूपित करते हैं, **आलेखीय रूप से (graphically)** निरूपित किया जाता है। क्या आपको उन विभिन्न प्रकारों के आलेखों के बारे में कुछ याद है जो हमने पिछली कक्षाओं में पढ़े थे?

1. एक चित्रालेख (pictograph) : संकेतों का प्रयोग करते हुए, आँकड़ों का चित्रीय निरूपण :

 = 100 कार ← एक संकेत 100 कारों को प्रदर्शित करता है।

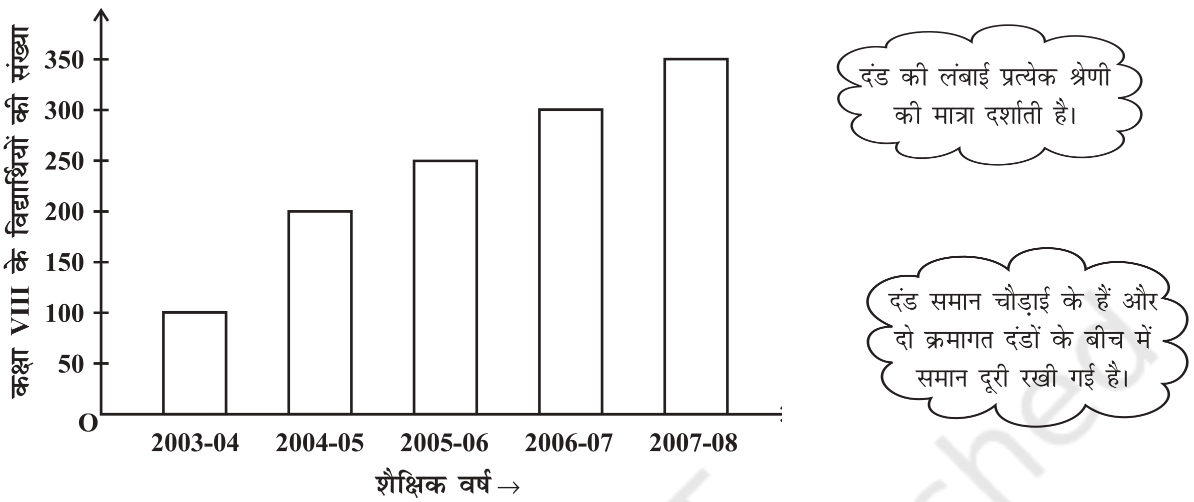
जुलाई	 = 250 100 को $\frac{1}{2}$ व्यक्त करता है
अगस्त	 = 300
सितंबर	 = ?

(i) जुलाई के महीने में कितनी कारों का उत्पादन हुआ?

(ii) किस महीने में कारों का अधिकतम उत्पादन हुआ?

© NCERT not to be republished

2. **एक दंड आलेख** (bar graph)**:** एक समान चौड़ाई के दंडों का प्रयोग करते हुए, सूचना का प्रदर्शन, जिसमें दंडों की लंबाइयाँ (ऊँचाइयाँ) क्रमशः उनके मानों के समानुपातिक होती हैं।



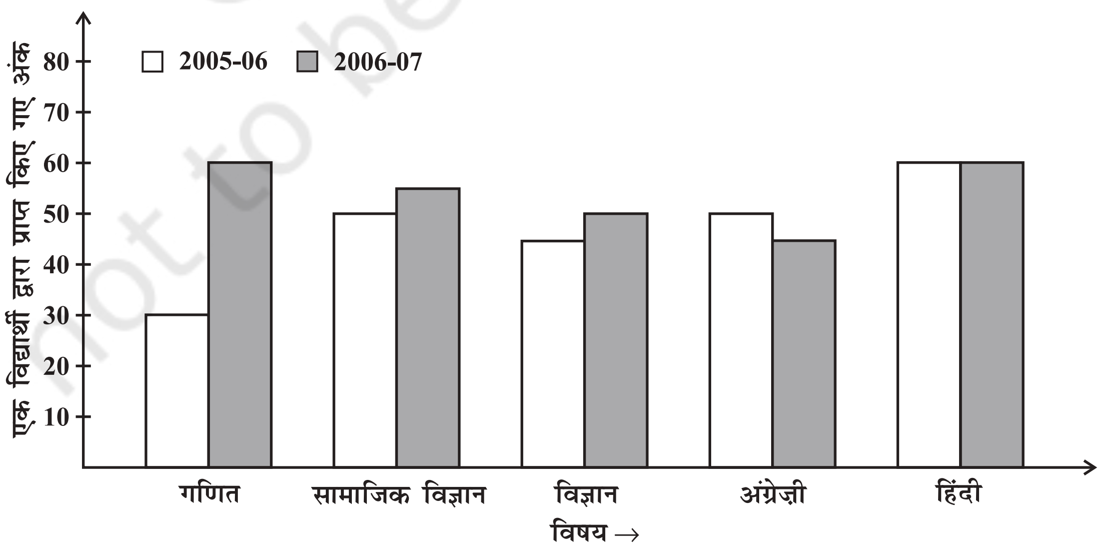
(i) इस दंड आलेख द्वारा क्या सूचना दी गई है?

(ii) किस वर्ष में विद्यार्थियों की संख्या में अधिकतम वृद्धि हुई?

(iii) किस वर्ष में विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है?

(iv) बताइए कि यह सत्य है या असत्य : ''2005–06 में विद्यार्थियों की संख्या 2003–04 की संख्या की दुगुनी है।''

3. **द्वि-दंड आलेख** (double bar graph) : आँकड़ों के दो समूहों को एक साथ दर्शाने वाला दंड आलेख



(i) इस द्वि-दंड आलेख द्वारा क्या सूचना दी गई है?

(ii) किस विषय में विद्यार्थी के प्रदर्शन में सबसे अधिक सुधार हुआ है?

(iii) किस विषय में प्रदर्शन में गिरावट आई है?

(iv) किस विषय में प्रदर्शन समान रहा है?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

यदि हम एक दंड आलेख के दंडों में से किसी एक की स्थिति बदल दें, तो क्या प्रदर्शित जानकारी में कोई बदलाव या परिवर्तन होगा? क्यों?

प्रयास कीजिए

दी हुई सूचना को निरूपित करने के लिए एक उपयुक्त आलेख खींचिए।

1.

महीना	जुलाई	अगस्त	सितंबर	अक्टूबर	नवंबर	दिसंबर
बेची गई घड़ियों की संख्या	1000	1500	1500	2000	2500	1500

2.

बच्चों की संख्या जिन्हें पसंद है	स्कूल A	स्कूल B	स्कूल C
पैदल चलना	40	55	15
साइकिल चलाना	45	25	35

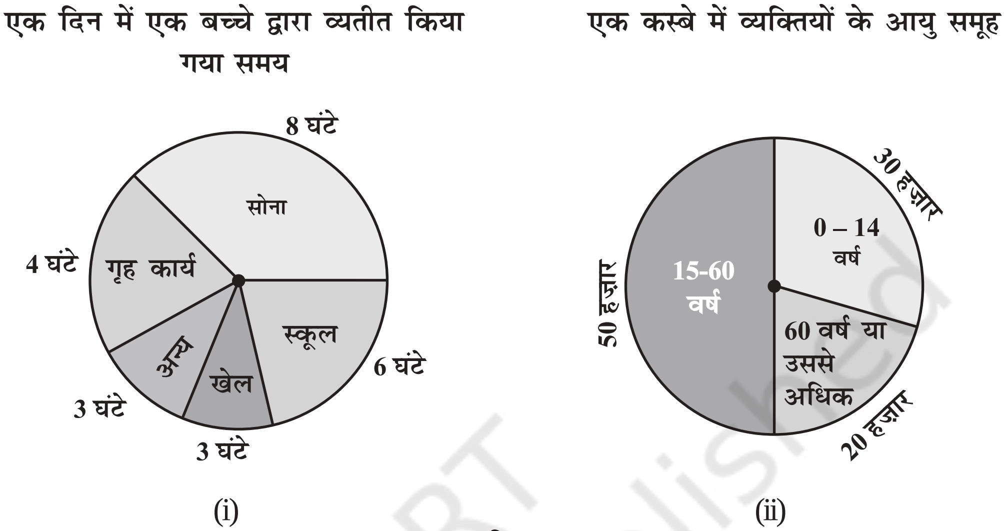
3. 8 सर्वश्रेष्ठ क्रिकेट टीमों द्वारा ODI में जीतने का प्रतिशत

टीम	चैंपियन ट्राफी से वर्ल्ड कप 2006 तक	2007 में पिछले 10 ODI
दक्षिण अफ्रीका	75%	78%
ऑस्ट्रेलिया	61%	40%
श्रीलंका	54%	38%
न्यूज़ीलैंड	47%	50%
इंग्लैंड	46%	50%
पाकिस्तान	45%	44%
वेस्टइंडीज़	44%	30%
भारत	43%	56%

© NCERT not to be republished

4.2 वृत्त आलेख या पाई चार्ट

क्या आपके सम्मुख कभी वृत्तीय रूप में निरूपित आँकड़े प्रस्तुत हुए हैं, जैसे आकृति 4.1 में दर्शाए गए हैं?



आकृति 4.1

ये निरूपण **वृत्त आलेख (circle graphs)** कहलाते हैं। एक वृत्त आलेख एक संपूर्ण (whole) और उसके भागों में संबंध दर्शाता है। यहाँ संपूर्ण वृत्त को त्रिज्यखंडों (sectors) में विभाजित किया जाता है। प्रत्येक त्रिज्यखंड का साइज़ या आमाप उसके द्वारा निरूपित क्रियाकलाप या सूचना के समानुपाती होता है।

उदाहरणार्थ, उपरोक्त आलेख में, सोने की क्रिया में व्यतीत किए गए घंटों में त्रिज्यखंड का आनुपातिक भाग

$$= \frac{\text{सोने के घंटों की संख्या}}{\text{संपूर्ण दिन}} = \frac{8 \text{ घंटे}}{24 \text{ घंटे}} = \frac{1}{3}$$

इसीलिए, इस त्रिज्यखंड को पूरे वृत्त के $\frac{1}{3}$ वें भाग के रूप में खींचा गया है। इसी प्रकार, स्कूल में व्यतीत किए गए घंटों के त्रिज्यखंड का आनुपातिक भाग

$$= \frac{\text{स्कूल के घंटों की संख्या}}{\text{संपूर्ण दिन}} = \frac{6 \text{ घंटे}}{24 \text{ घंटे}} = \frac{1}{4}$$

इसीलिए, इस त्रिज्यखंड को वृत्त के $\frac{1}{4}$ भाग के रूप में खींचा गया है। इसी प्रकार, अन्य त्रिज्यखंडों के माप ज्ञात किए जा सकते हैं।

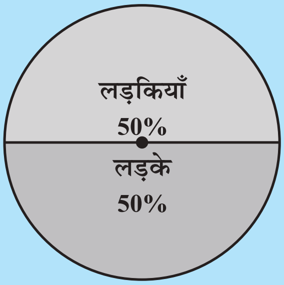
सभी क्रियाकलापों की भिन्नों को जोड़िए। क्या आपको योग **एक** प्राप्त होता है?

वृत्त आलेख **पाई चार्ट (pie chart)** भी कहलाता है।

प्रयास कीजिए

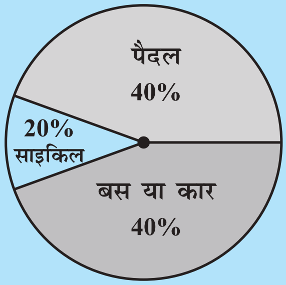
1. निम्नलिखित पाई चार्टों में से प्रत्येक (आकृति 4.2) आपकी कक्षा के बारे में एक भिन्न प्रकार की सूचना देता है। इनमें से प्रत्येक सूचना को निरूपित करने वाला वृत्त का भाग ज्ञात कीजिए।

(i)



लड़कियाँ या लड़के

(ii)



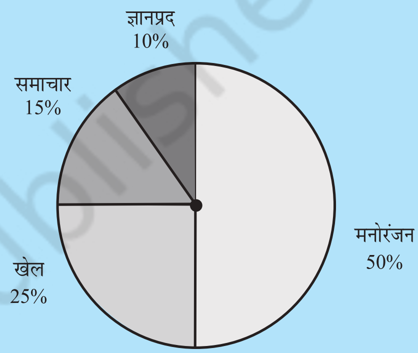
स्कूल के लिए परिवहन

(iii)

गणित से प्यार/घृणा

आकृति 4.2

2. दिए हुए पाई चार्ट (आकृति 4.3) के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :
   (i) किस प्रकार के कार्यक्रम सबसे अधिक देखे जाते हैं?
   (ii) किन दो प्रकार के कार्यक्रमों को देखने वालों की कुल संख्या खेलों के कार्यक्रमों को देखने वालों की संख्या के बराबर है?



टी. वी. पर विभिन्न प्रकार के चैनलों को देखने वालों की संख्या

आकृति 4.3

4.2.1 पाई चार्टों का खींचना

किसी स्कूल के विद्यार्थियों द्वारा पसंद किए जाने वाली आइसक्रीमों की महक या स्वाद (प्रतिशतों में) नीचे दिए गए हैं :

महक	महकों को पसंद करने वाले विद्यार्थियों का प्रतिशत
चॉकलेट	50%
वनीला	25%
अन्य प्रकार	25%

आइए, इन आँकड़ों को एक पाई चार्ट के रूप में निरूपित करें।

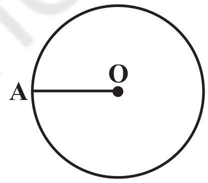
वृत्त के केंद्र पर पूरा कोण 360° है। त्रिज्यखंडों के केंद्रीय कोण (central angles) 360° के भाग

या कोई भिन्न होंगे। हम त्रिज्यखंडों के केंद्रीय कोणों को ज्ञात करने के लिए एक सारणी बनाएँगे (सारणी 4.1)।

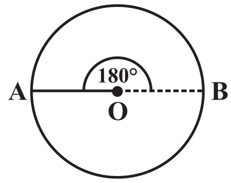
सारणी 4.1

महक	महकों को पसंद करने वाले विद्यार्थियों का प्रतिशत	संपूर्ण का भाग	360° भाग
चॉकलेट	50%	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	360° का $\frac{1}{2}$ = 180°
वैनीला	25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	360° का $\frac{1}{4}$ = 90°
अन्य प्रकार	25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	360° का $\frac{1}{4}$ = 90°

1. किसी सुविधाजनक त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसका केंद्र (O) और एक त्रिज्या (OA) अंकित कीजिए।



2. चॉकलेट के त्रिज्यखंड का कोण 180° है। चाँदे का प्रयोग करके, ∠AOB=180° खींचिए।



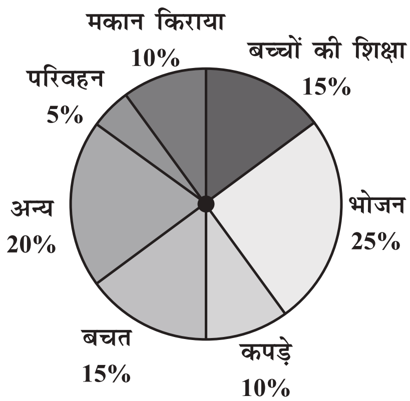
3. बचे हुए त्रिज्यखंडों को भी इसी प्रकार अंकित करते रहिए।

उदाहरण 1 : संलग्न पाई चार्ट (आकृति 4.4) एक महीने में एक परिवार के विभिन्न मदों में व्यय और उसकी बचत (प्रतिशतों में) को दर्शाता है।

(i) किस मद में व्यय सबसे अधिक है?

(ii) किस मद पर हुआ व्यय परिवार की कुल बचत के बराबर है?

(iii) यदि परिवार की मासिक बचत ₹ 3000 है, तो कपड़ों पर हुआ मासिक व्यय क्या है?



आकृति 4.4

हल :

(i) भोजन पर व्यय सबसे अधिक है।

(ii) बच्चों की शिक्षा पर हुआ व्यय (15%) परिवार की कुल बचत के बराबर है।

(iii) 15% निरूपित करता है, ₹ 3000।

अत:, 10% निरूपित करता है, ₹ $\frac{3000}{15} \times 10$ = ₹ 2000।

उदाहरण 2 : एक विशेष दिन किसी बेकरी की दुकान में हुई विभिन्न वस्तुओं की बिक्री (रुपयों में) नीचे दी गई है:

सामान्य ब्रेड	:	320
फ्रूट ब्रेड	:	80
केक और पेस्ट्री	:	160
बिस्कुट	:	120
अन्य	:	40
कुल	:	**720**

इन आँकड़ों के लिए एक पाई चार्ट खींचिए।

हल : हम प्रत्येक त्रिज्यखंड का केंद्रीय कोण ज्ञात करते हैं। यहाँ कुल बिक्री ₹ 720 है। इससे हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है:

वस्तु	बिक्री (₹ में)	संपूर्ण का भाग	केंद्रीय कोण
सामान्य ब्रेड	320	$\frac{320}{720} = \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \times 360° = 160°$
बिस्कुट	120	$\frac{120}{720} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360° = 60°$
केक और पेस्ट्री	160	$\frac{160}{720} = \frac{2}{9}$	$\frac{2}{9} \times 360° = 80°$
फ्रूट ब्रेड	80	$\frac{80}{720} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \times 360° = 40°$
अन्य	40	$\frac{40}{720} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{18} \times 360° = 20°$

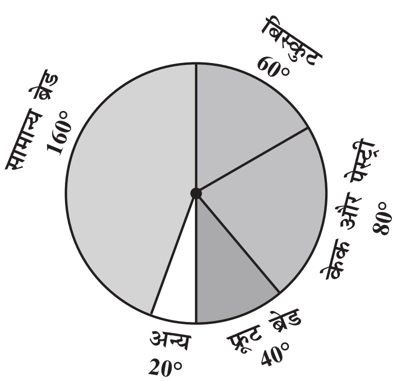
उपरोक्त का प्रयोग करके, अब हम पाई चार्ट बनाते हैं (आकृति 4.5)।

प्रयास कीजिए

नीचे दिए आँकड़ों के लिए एक पाई चार्ट खींचिए :

एक बच्चे द्वारा एक दिन में व्यतीत किया गया समय इस प्रकार है:

सोना	—	8 घंटे
स्कूल	—	6 घंटे
गृह कार्य	—	4 घंटे
खेल	—	4 घंटे
अन्य	—	2 घंटे



आकृति 4.5

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

निम्नलिखित आँकड़ों को दर्शाने के लिए, किस प्रकार का आलेख उपयुक्त रहेगा?

1. **किसी राज्य के खाद्यान्न का उत्पादन :**

वर्ष	2001	2002	2003	2004	2005	2006
उत्पादन (लाख टनों में)	60	50	70	55	80	85

2. **व्यक्तियों के एक समूह के भोजन की पसंद :**

मनपसंद भोजन	**व्यक्तियों की संख्या**
उत्तर भारतीय	30
दक्षिण भारतीय	40
चाइनीज़	25
अन्य	25
योग	**120**

3. **किसी फैक्ट्री के श्रमिकों के एक समूह की दैनिक आय :**

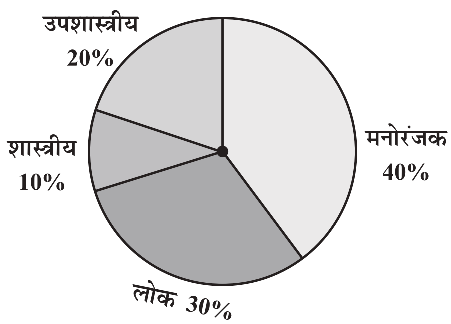
दैनिक आय (₹ में)	**श्रमिकों की संख्या (एक फैक्ट्री में)**
75-100	45
100-125	35
125-150	55
150-175	30
175-200	50
200-225	125
225-250	140
योग	**480**

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 4.1

1. किसी शहर के युवा व्यक्तियों के एक समूह का यह जानने के लिए एक सर्वे किया गया कि वे किस प्रकार का संगीत पसंद करते हैं। इनसे प्राप्त आँकड़ों को संलग्न पाई चार्ट में दर्शाया गया है। इस पाई चार्ट से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) यदि 20 व्यक्ति शास्त्रीय संगीत पसंद करते हैं, तो कुल कितने युवा व्यक्तियों का सर्वे किया गया था?



(ii) किस प्रकार का संगीत सबसे अधिक व्यक्तियों द्वारा पसंद किया जाता है?

(iii) यदि कोई कैसेट कंपनी 1000 सी.डी. (C.D.) बनाए, तो वह प्रत्येक प्रकार की कितनी सी.डी. बनाएगी?

2. 360 व्यक्तियों के एक समूह से तीन ऋतुओं – वर्षा, सर्दी और गर्मी में से अपनी मनपसंद ऋतु के लिए मतदान करने को कहा गया। इनसे प्राप्त आँकड़ों को संलग्न चित्र में दर्शाया गया है :

(i) किस ऋतु को सबसे अधिक मत मिले?

(ii) प्रत्येक त्रिज्यखंड का केंद्रीय कोण ज्ञात कीजिए।

(iii) इस सूचना को दर्शाने के लिए, एक पाई चार्ट खींचिए।

ऋतु		मतों की संख्या
ग्रीष्म		90
वर्षा		120
शीत		150

3. निम्नलिखित सूचना को दर्शाने वाला एक पाई चार्ट खींचिए। यह सारणी व्यक्तियों के एक समूह द्वारा पसंद किए जाने वाले रंगों को दर्शाती है।

रंग	व्यक्तियों की संख्या
नीला	18
हरा	9
लाल	6
पीला	3
योग	**36**

प्रत्येक त्रिज्यखंड का आनुपातिक भाग ज्ञात कीजिए।
उदाहरणार्थ, नीला $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ है; हरा $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$; इत्यादि।
इसे प्रयोग करते हुए, संगत कोण ज्ञात कीजिए।

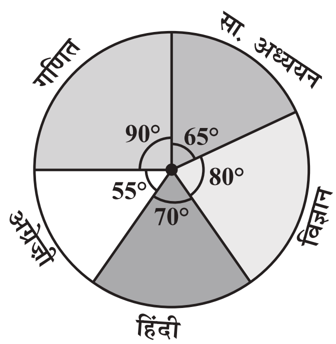
4. संलग्न पाई चार्ट एक विद्यार्थी द्वारा किसी परीक्षा में हिंदी, अंग्रेज़ी, गणित, सामाजिक विज्ञान और विज्ञान में प्राप्त किए गए अंकों को दर्शाता है। यदि उस विद्यार्थी द्वारा प्राप्त किए गए कुल अंक 540 थे, तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) किस विषय में उस विद्यार्थी ने 105 अंक प्राप्त किए?

(**संकेत** : 540 अंकों के लिए केंद्रीय कोण 360° है। अत:, 105 अंकों के लिए केंद्रीय कोण क्या होगा?)

(ii) उस विद्यार्थी ने गणित में हिंदी से कितने अधिक अंक प्राप्त किए?

(iii) जाँच कीजिए कि क्या सामाजिक विज्ञान और गणित में प्राप्त किए गए अंकों का योग विज्ञान और हिंदी में प्राप्त किए गए अंकों के योग से अधिक है। (**संकेत** : केवल केंद्रीय कोणों पर ध्यान दीजिए।)



5. किसी छात्रावास में, विभिन्न भाषाएँ बोलने वाले विद्यार्थियों की संख्या नीचे दी गई है। इन आँकड़ों को एक पाई चार्ट द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

भाषा	हिंदी	अंग्रेज़ी	मराठी	तमिल	बंगाली	योग
विद्यार्थियों की संख्या	40	12	9	7	4	72

© NCERT not to be republished

4.3 संयोग और प्रायिकता

कभी–कभी ऐसा होता है कि वर्षा ऋतु में, हम प्रत्येक दिन बरसाती लेकर बाहर निकलते हैं और कई दिनों तक कोई वर्षा नहीं होती है। परंतु संयोग से एक दिन आप बरसाती ले जाना भूल जाते हैं और उसी दिन भारी वर्षा हो जाती है।

कभी–कभी ऐसा हो जाता है कि एक विद्यार्थी एक टेस्ट के लिए 5 में से 4 अध्याय अच्छी प्रकार से तैयार कर लेता है। परंतु एक बड़ा प्रश्न उस अध्याय में से पूछ लिया जाता है जिसे उसने अच्छी प्रकार से तैयार नहीं किया था।

प्रत्येक व्यक्ति जानता है कि एक विशेष रेलगाड़ी सही समय से चलती है, परंतु जिस दिन आप सही समय पर पहुँचते हैं, उसी दिन वह देरी से आती है।

आपको उपरोक्त प्रकार की अनेक स्थितियों का सामना करना पड़ता है, जहाँ आप संयोग (chance) का सहारा लेकर कार्य करना चाहते हैं, परंतु वह उस प्रकार से नहीं होता जैसा आप चाहते हैं। क्या आप ऐसे कुछ और उदाहरण दे सकते हैं? ये ऐसे उदाहरण हैं जहाँ किसी बात के होने या न होने के संयोग बराबर (समान) नहीं हैं।

एक रेलगाड़ी के समय पर आने या न आने के संयोग बराबर नहीं हैं। जब आप कोई टिकट खरीदते हैं और यदि वह प्रतीक्षा सूची में है, तो आप निश्चय ही संयोग का सहारा लेते हैं। आप यह आशा करते हैं कि जब आप यात्रा करेंगे तब संभवत: इस टिकट पर आपकी सीट आरक्षित हो जाएगी। परंतु यहाँ हम कुछ ऐसे प्रयोगों (experiments) पर विचार करेंगे जिनमें परिणामों के घटित होने के संयोग बराबर हैं।

4.3.1 कोई परिणाम प्राप्त करना

आपने संभवत: यह देखा होगा कि एक क्रिकेट मैच के प्रारंभ होने से पहले, दोनों टीमों के कप्तान बाहर जाकर यह निर्णय करने के लिए सिक्का (coin) उछालते (toss) हैं कि कौन–सी टीम पहले बल्लेबाजी करेगी।

जब एक सिक्के को उछाला जाता है, तो आपको क्या संभव परिणाम प्राप्त होते हैं? नि:संदेह, चित (Head) या पट (Tail)।

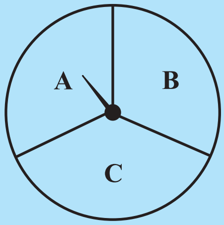
कल्पना कीजिए कि आप एक टीम के कप्तान हैं और आपका मित्र दूसरी टीम का कप्तान है। आप एक सिक्का उछालते हैं और अपने मित्र से चित या पट बोलने को कहते हैं। क्या आप इस उछाल के परिणाम पर कोई नियंत्रण रख सकते हैं? क्या आपको चित प्राप्त हो सकता है, यदि आप ऐसा चाहते हैं? अथवा क्या आपको पट प्राप्त हो सकता है, यदि आप ऐसा चाहते हैं? नहीं, ऐसा संभव नहीं है। इस प्रकार का प्रयोग एक **यादृच्छ** या **यादृच्छिक प्रयोग (random experiment)** कहलाता है। चित और पट इस प्रयोग के दो **परिणाम (outcomes)** हैं।

प्रयास कीजिए

1. यदि आप एक स्कूटर चलाना प्रारंभ करें, तो संभव परिणाम क्या हैं?
2. जब एक पासे (die) को फेंका जाता है, तो संभव छह परिणाम क्या हैं?

© NCERT not to be republished

3. जब आप पहिए को घुमाएँगे, तो संभावित परिणाम क्या होंगे (आकृति 4.6)? इनकी सूची बनाइए। (यहाँ परिणाम का अर्थ है कि वह त्रिज्यखंड जहाँ पर सूचक (pointer) घुमाने पर रुकेगा।)



आकृति 4.6

4. आपके पास एक थैला है और उसमें भिन्न-भिन्न रंगों की पाँच एक जैसी गेंदें हैं (आकृति 4.7)। आप बिना देखे इसमें से एक गेंद निकालते हैं। प्राप्त होने वाले परिणामों को लिखिए।

आकृति 4.7

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

एक पासे को फेंकने पर :

- क्या पहले खिलाड़ी के 6 प्राप्त करने का संयोग अधिक है?
- क्या उसके बाद खेलने वाले खिलाड़ी के 6 प्राप्त करने का संयोग कम है?
- मान लीजिए कि दूसरा खिलाड़ी 6 प्राप्त कर लेता है। क्या इसका अर्थ यह है कि तीसरे खिलाड़ी द्वारा 6 प्राप्त करने का कोई संयोग नहीं है?

4.3.2 सम संभावित परिणाम

एक सिक्के को अनेक बार उछाला जाता है तथा जितनी बार चित या पट आते हैं उन्हें लिख लिया जाता है। आइए अपनी परिणाम शीट (तालिका) को देखें, जहाँ हम उछालों की संख्या में वृद्धि करते जा रहे हैं :

उछालों की संख्या	मिलान चिह्न (H)	चितों की संख्या	मिलान चिह्न (T)	पटों की संख्या
50	卌 卌 卌 卌 卌 ||	27	卌 卌 卌 卌 |||	23
60	卌 卌 卌 卌 卌 |||	28	卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||	32
70	...	33	...	37
80	...	38	...	42
90	...	44	...	46
100	...	48	...	52

ध्यान दीजिए कि जब आप उछालों की संख्या अधिकाधिक बढ़ाते जाते हैं, तब चितों की संख्या और पटों की संख्या परस्पर अधिकाधिक निकट आते जाते हैं।

© NCERT not to be republished

ऐसा ही एक पासे के साथ भी हो सकता है, जब उसे एक बड़ी संख्या में फेंका जाता है। छह परिणामों में से प्रत्येक की संख्या परस्पर लगभग बराबर हो जाती हैं।

ऐसी स्थितियों में, हम कह सकते हैं कि प्रयोग के विभिन्न परिणाम **सम संभावित** या **समप्रायिक** (equally likely) हैं। इसका अर्थ यह है कि सभी में से प्रत्येक परिणाम के आने का संयोग (chance) एक ही है।

4.3.3 संयोग को प्रायिकता से जोड़ना

एक सिक्के को एक बार उछालने के प्रयोग पर विचार कीजिए। परिणाम क्या हैं? यहाँ केवल दो परिणाम हैं– चित या पट। दोनों ही परिणाम समप्रायिक (equally likely) हैं। एक चित प्राप्त करने की संभावना 2 परिणामों में से 1, अर्थात् $\frac{1}{2}$ है। दूसरे शब्दों में, हम कहते हैं कि एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता (probability) = $\frac{1}{2}$ है। एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

अब एक पासे को फेंकने के उदाहरण पर विचार कीजिए, जिसके फलकों (faces) पर 1, 2, 3, 4, 5, 6 (एक फलक पर एक संख्या) अंकित हैं। यदि आप इसे एक बार फेंके, तो परिणाम क्या प्राप्त होंगे?

परिणाम हैं : 1, 2, 3, 4, 5, 6। इस प्रकार, यहाँ छह समप्रायिक परिणाम हैं।

परिणाम 2 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

यह प्रायिकता है : $\frac{1}{6}$ ← 2 देने वाले परिणामों की संख्या
← समप्रायिक परिणामों की संख्या

संख्या 5 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है? संख्या 7 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है? 1 से 6 तक की संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

4.3.4 घटनाओं के रूप में परिणाम

एक प्रयोग के प्रत्येक परिणाम या परिणामों के संग्रह से एक **घटना (event)** बनती है। उदाहरणार्थ, एक सिक्के को उछालने के प्रयोग में, एक 'चित' प्राप्त करना एक घटना है तथा एक 'पट' प्राप्त करना भी एक घटना है।

एक पासे को फेंकने की स्थिति में, परिणामों 1, 2, 3, 4, 5 और 6 में से प्रत्येक परिणाम प्राप्त करना एक घटना है।

© NCERT not to be republished

क्या एक सम संख्या प्राप्त करना एक घटना है? क्योंकि एक सम संख्या 2, 4 या 6 हो सकती है, इसलिए एक सम संख्या प्राप्त करना भी एक घटना है। एक सम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी?

यह है : $\frac{3}{6}$ ← उन परिणामों की संख्या जो घटना बनाते हैं
← प्रयोग के परिणामों की कुल संख्या

उदाहरण 3 : एक थैले में 4 लाल गेंदें और 2 पीली गेंदें हैं। (ये गेंदें रंग के अतिरिक्त सभी प्रकार से एक जैसी, अर्थात् सर्वसम (identical) हैं।) थैले के अंदर से बिना देखे एक गेंद निकाली जाती है। एक लाल गेंद प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है? क्या यह एक पीली गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता से अधिक है या कम?

हल : यहाँ घटना के कुल (4 + 2 =) 6 परिणाम हैं। लाल गेंद प्राप्त करने के लिए 4 परिणाम हैं। (क्यों?)

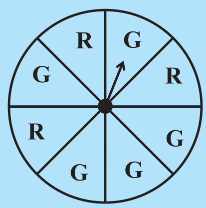
अत:, लाल गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ है।

इसी प्रकार, पीली गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ है। (क्यों?)

अत:, लाल गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता पीली गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता से अधिक है।

प्रयास कीजिए

1. मान लीजिए कि आप पहिए को घुमाते हैं (आकृति 4.8)।
   (i) इस पहिए पर एक हरा त्रिज्यखंड प्राप्त करने के परिणामों की संख्या और हरा त्रिज्यखंड प्राप्त न होने के परिणामों की संख्या लिखिए।
   (ii) एक हरा त्रिज्यखंड प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
   (iii) एक हरा त्रिज्यखंड प्राप्त न होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।



आकृति 4.8

4.3.5 वास्तविक जीवन से संबंधित संयोग और प्रायिकता

हमने उस संयोग की बात की थी जिसमें केवल उसी दिन वर्षा हुई जब हम बरसाती लेकर नहीं चले थे। आप प्रायिकता के पदों में संयोग के बारे में क्या कह सकते थे? क्या यह वर्षा ऋतु में 10 दिन में 1 दिन हो सकता था?

तब वर्षा होने की प्रायिकता $\frac{1}{10}$ है। वर्षा न होने की प्रायिकता $\frac{9}{10}$ है।

(यह कल्पना करते हुए कि किसी दिन वर्षा होना या न होना सम संभावित या समप्रायिक है।)

वास्तविक जीवन की विभिन्न स्थितियों में प्रायिकता का प्रयोग किया जाता है।

1. एक बड़े समूह के अभिलक्षणों या विशेषताओं को उस समूह के एक छोटे भाग का प्रयोग करते हुए ज्ञात करना। उदाहरणार्थ, चुनाव के समय 'एक्जिट पोल' (exit poll) किया जाता है। इसमें संपूर्ण क्षेत्र में बंटित केंद्रों में से यदृच्छ रूप से (बिना किसी पूर्वाग्रह के) कुछ

© NCERT not to be republished

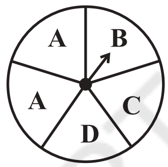
केंद्र चुनकर मतदान करके आने वाले व्यक्तियों से यह पूछा जाता है कि उन्होंने किसे मत दिया है। इससे प्रत्येक प्रत्याशी के जीतने की संभावना का अनुमान लग जाता है तथा इसी आधार पर प्रागुक्तियाँ (भविष्यवाणियाँ) की जाती हैं।

2. मौसम विभाग बीते हुए अनेक वर्षों के आँकड़ों की प्रवृत्तियों को देखकर मौसम के बारे में भविष्यवाणी (प्रागुक्तियाँ) करता है।

प्रश्नावली 4.2

1. इन प्रयोगों में आप जो परिणाम देख सकते हैं उन्हें लिखिए :

(a) पहिए को घुमाना



(b) दो सिक्कों को एक साथ उछालना

2. जब एक पासे को फेंका जाता है, तब निम्नलिखित प्रत्येक घटना से प्राप्त होने वाले परिणामों को लिखिए :

(i) (a) एक अभाज्य संख्या (b) एक अभाज्य संख्या नहीं

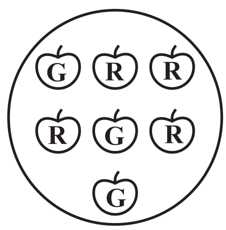
(ii) (a) 5 से बड़ी एक संख्या (b) 5 से बड़ी संख्या नहीं

3. ज्ञात कीजिए :

(a) (प्रश्न 1(*a*) में)सूचक के D पर रुकने की प्रायिकता।

(b) अच्छी प्रकार से फेटी हुई 52 ताशों की एक गड्डी में से 1 इक्का प्राप्त करने की प्रायिकता।

(c) एक लाल सेब प्राप्त करने की प्रायिकता (दी हुई आकृति से देखिए)।



4. 10 पृथक् पर्चियों पर 1 से 10 तक संख्याएँ लिखी हुई हैं (एक पर्ची पर एक संख्या), उन्हें एक बक्स में रखकर अच्छी प्रकार से मिला दिया जाता है। बक्स के अंदर से बिना देखे एक पर्ची निकाली जाती है। निम्नलिखित की प्रायिकता क्या है?

(i) संख्या 6 प्राप्त करना।

(ii) 6 से छोटी एक संख्या प्राप्त करना।

(iii) 6 से बड़ी एक संख्या प्राप्त करना।

(iv) 1 अंक की एक संख्या प्राप्त करना।

© NCERT not to be republished

5. यदि आपके पास 3 हरे त्रिज्यखंड, 1 नीला त्रिज्यखंड और 1 लाल त्रिज्यखंड वाला एक घूमने वाला पहिया है तो एक हरा त्रिज्यखंड प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है? ऐसा त्रिज्यखंड प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है, जो नीला न हो?

6. प्रश्न 2 में दी हुई घटनाओं की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

हमने क्या चर्चा की?

1. किन्हीं भी आँकड़ों से अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिए हमें उन्हें क्रमबद्ध रूप में संगठित करने की आवश्यकता पड़ती है।

2. आँकड़ों को **वृत्त आलेख** या पाई चार्ट का प्रयोग करके भी प्रस्तुत किया जा सकता है। एक वृत्त आलेख एक संपूर्ण और उसके भागों में संबंध को दर्शाता है।

3. कुछ ऐसे प्रयोग होते हैं जिनमें परिणामों के आने के संयोग बराबर होते हैं।

4. एक **यदृच्छ प्रयोग** वह प्रयोग है जिसमें परिणामों की ठीक-ठीक प्रागुक्ति (भविष्यवाणी) पहले से नहीं की जा सकती है।

5. किसी प्रयोग के परिणाम **सम संभावित** या **समप्रायिक** कहलाते हैं, यदि उनके आने के संयोग बराबर हों।

6. **एक घटना की प्रायिकता** $= \dfrac{\text{घटना को बनाने वाले परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के परिणामों की कुल संख्या}}$

जब परिणाम समप्रायिक हैं।

7. किसी प्रयोग के एक या अधिक परिणामों से एक घटना बनती है।

8. संयोग और प्रायिकता वास्तविक जीवन से संबंधित हैं।

© NCERT not to be republished

नोट

© NCERT not to be republished

अध्याय

5

वर्ग और वर्गमूल

0853CH06

5.1 भूमिका

आप जानते हैं कि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा (जहाँ 'भुजा' का अर्थ एक भुजा की लंबाई) होता है। निम्न सारणी का अध्ययन कीजिए :

वर्ग की भुजा (cm में)	वर्ग का क्षेत्रफल (cm^2 में)
1	$1 \times 1 = 1 = 1^2$
2	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$3 \times 3 = 9 = 3^2$
5	$5 \times 5 = 25 = 5^2$
8	$8 \times 8 = 64 = 8^2$
a	$a \times a = a^2$

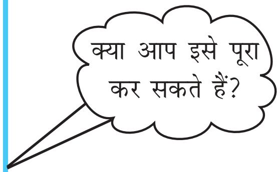
संख्याओं 4, 9, 25, 64 और इस प्रकार की दूसरी संख्याओं में क्या विशेष है? चूँकि 4 को $2 \times 2 = 2^2$, 9 को $3 \times 3 = 3^2$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं अत: हम पाते हैं कि इस प्रकार की सभी संख्याओं को उसी संख्या के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इस प्रकार की संख्याएँ जैसे 1, 4, 9, 16, 25, ... को वर्ग संख्याएँ कहते हैं।

साधारणतया, यदि एक प्राकृत संख्या m को n^2 से व्यक्त किया जाता है, जहाँ n भी एक प्राकृत संख्या है, तब m एक **वर्ग संख्या** है। क्या 32 एक वर्ग संख्या है?

हम जानते हैं कि $5^2 = 25$ और $6^2 = 36$ होता है। यदि 32 एक वर्ग संख्या है, तो यह एक प्राकृत संख्या का वर्ग होना चाहिए जो 5 और 6 के बीच हो। परंतु यहाँ 5 और 6 के बीच कोई प्राकृत संख्या नहीं है। निम्न संख्याओं और उनके वर्गों के बारे में विचार कीजिए :

संख्याएँ	वर्ग
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 2 = 4$

3	3 × 3 = 9
4	4 × 4 = 16
5	5 × 5 = 25
6	-----------
7	-----------
8	-----------
9	-----------
10	-----------



उपरोक्त सारणी से क्या आप 1 से 100 के बीच की वर्ग संख्याओं को लिख सकते हैं? क्या 100 तक कोई प्राकृत वर्ग संख्या छूट गई है? आप पाएँगे कि शेष सभी संख्याएँ, वर्ग संख्याएँ नहीं हैं। संख्याएँ 1, 4, 9, 16 वर्ग संख्याएँ हैं। ये संख्याएँ **पूर्ण वर्ग संख्याएँ** भी कहलाती हैं।

प्रयास कीजिए

1. दी गई संख्याओं के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
   (i) 30 और 40 (ii) 50 और 60

5.2 वर्ग संख्याओं के गुणधर्म

निम्नलिखित सारणी में 1 से 20 तक की वर्ग संख्याओं को दिखाया गया है।

संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

उपरोक्त सारणी में वर्ग संख्याओं का अध्ययन कीजिए। वर्ग संख्याओं का अंतिम अंक (यानी वर्ग संख्याओं के इकाई स्थान का अंक) क्या है? ये सभी संख्याएँ इकाई स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 या 9 पर समाप्त होती हैं। इनमें से किसी भी संख्या के इकाई स्थान पर 2, 3, 7 या 8 नहीं आता है।

क्या हम कह सकते हैं कि यदि एक संख्या 0, 1, 4, 5, 6 या 9 पर समाप्त होती है, तो वह एक वर्ग संख्या होगी? इस बारे में सोचिए।

प्रयास कीजिए

1. क्या हम कह सकते हैं कि निम्न संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं? हम कैसे जानते हैं?
   (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
   (v) 1069 (vi) 2061
   पाँच ऐसी संख्याएँ लिखिए जिनके इकाई स्थान को देखकर आप बता सकें कि ये संख्याएँ वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।
2. पाँच ऐसी संख्याएँ लिखिए जिनके इकाई स्थान को देखकर आप नहीं बता सकते कि वे वर्ग संख्याएँ हैं या नहीं।

- निम्न सारणी में कुछ संख्याओं एवं उनके वर्गों का अध्ययन कीजिए और दोनों में इकाई स्थान का निरीक्षण कीजिए :

सारणी 1

संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	30	900
7	49	17	289	35	1225
8	64	18	324	40	1600
9	81	19	361	45	2025
10	100	20	400	50	2500

निम्नलिखित वर्ग संख्याएँ अंक 1 पर समाप्त होती हैं :

वर्ग	अंक
1	1
81	9
121	11
361	19
441	21

प्रयास कीजिए

$123^2, 77^2, 82^2, 161^2, 109^2$ में से कौन सी संख्या अंक 1 पर समाप्त होगी?

इनके अलावा अगली दो वर्ग संख्याएँ लिखिए जो 1 पर उनकी संगत संख्याओं पर समाप्त होती है।

आप देखेंगे कि *यदि एक संख्या के इकाई स्थान पर 1 या 9 आता है तब इसकी वर्ग संख्या के अंत में 1 आता है।*

- अब 6 पर समाप्त होने वाली संख्या पर विचार कीजिए :

वर्ग	अंक
16	4
36	6
196	14
256	16

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में से कौन सी संख्याओं के इकाई स्थान पर 6 अंक होगा :

(i) 19^2 (ii) 24^2 (iii) 26^2
(iv) 36^2 (v) 34^2

हम देखते हैं कि *जब कोई वर्ग संख्या 6 पर समाप्त होती है तो वह जिस संख्या का वर्ग है, उसका इकाई अंक या तो 4 या 6 होगा।*

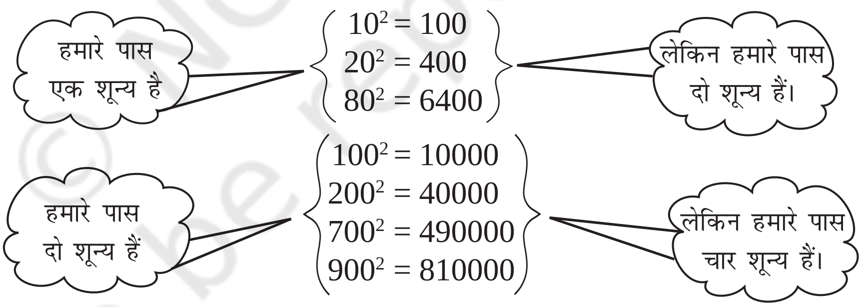
क्या आप इस प्रकार के कुछ और नियम, सारणी में लिखी गई संख्याओं एवं उनके वर्गों के अवलोकन से ज्ञात कर सकते हैं (सारणी 1)?

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग करने पर उनके इकाई स्थान पर क्या होगा?

(i) 1234 (ii) 26387 (iii) 52698 (iv) 99880
(v) 21222 (vi) 9106

- निम्नलिखित संख्याओं और उनके वर्गों पर विचार कीजिए :



$$10^2 = 100 \quad 20^2 = 400 \quad 80^2 = 6400$$

$$100^2 = 10000 \quad 200^2 = 40000 \quad 700^2 = 490000 \quad 900^2 = 810000$$

यदि एक संख्या के अंत में तीन शून्य हों, तो उसके वर्ग में कितने शून्य होंगे? क्या आपने, संख्या के अंत में शून्यों की संख्या और उसके वर्ग के अंत में शून्यों की संख्या पर ध्यान दिया? क्या आप कह सकते हैं कि वर्ग संख्याओं के अंत में शून्यों की संख्या केवल सम संख्या होती है?

- संख्या और उनके वर्गों के लिए सारणी 1 देखिए।
  सम संख्याओं के वर्गों एवं विषम संख्याओं के वर्गों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

प्रयास कीजिए

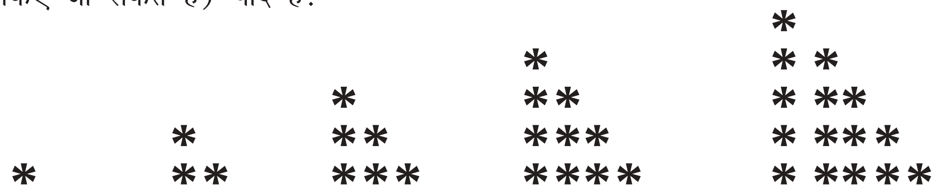
1. निम्नलिखित में से किन संख्याओं के वर्ग विषम संख्या/सम संख्या होंगे। क्यों?
   (i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980
2. निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग में शून्यों की संख्या क्या होगी?
   (i) 60 (ii) 400

© NCERT not to be republished

5.3 कुछ और रोचक प्रतिरूप

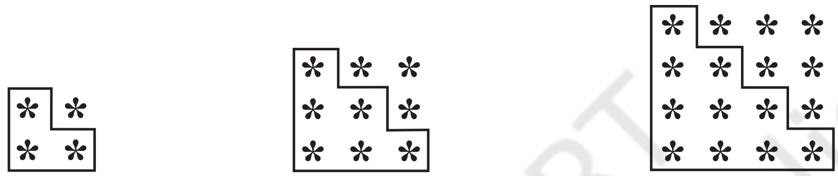
1. त्रिकोणीय संख्याओं के जोड़

क्या आपको त्रिकोणीय संख्याएँ (संख्याएँ जिनके बिंदु प्रतिरूप त्रिभुजों के रूप में व्यवस्थित किए जा सकते हैं) याद हैं?



1 3 6 10 15

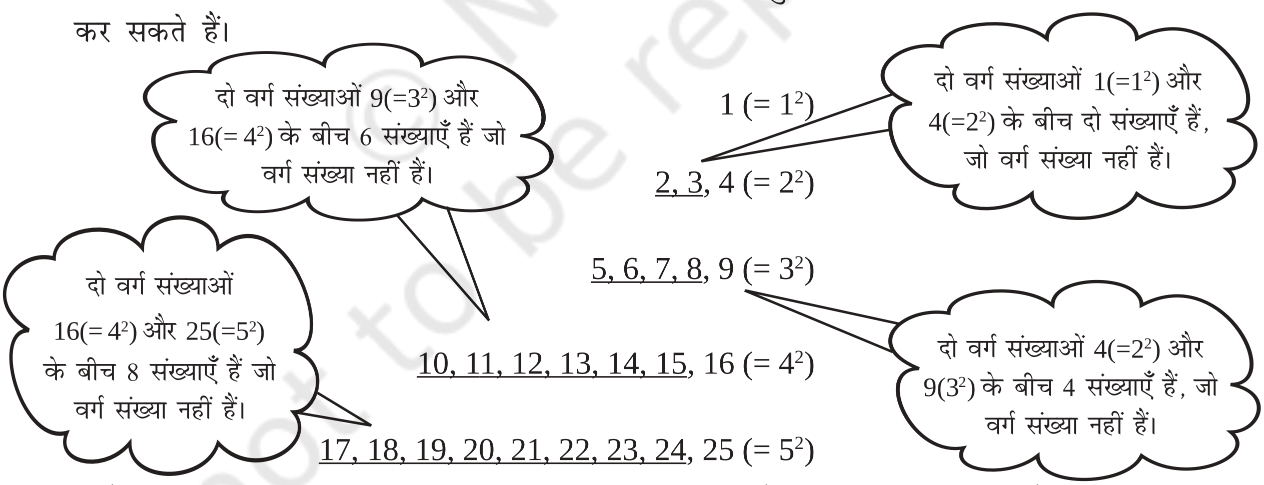
यदि हम दो क्रमागत त्रिभुजीय संख्याओं को आपस में जोड़ते हैं तब हम एक वर्ग संख्या प्राप्त करते हैं, जैसे–



$1 + 3 = 4 = 2^2$ $3 + 6 = 9 = 3^2$ $6 + 10 = 16 = 4^2$

2. वर्ग संख्याओं के बीच की संख्याएँ

अब हम देखेंगे कि क्या हम दो क्रमागत वर्ग संख्याओं के बीच कुछ रुचिकर प्रतिरूप प्राप्त कर सकते हैं।



$1^2(=1)$ और $2^2(= 4)$ के बीच में दो (अर्थात् 2×1) संख्याएँ 2, 3, हैं जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।

$2^2(= 4)$ और $3^2(= 9)$ के बीच में चार (अर्थात् 2×2) संख्याएँ 5, 6, 7, 8, है जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।

अब $3^2 = 9, \quad 4^2 = 16$

अतः $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

यहाँ $9(=3^2)$ और $16(= 4^2)$ के बीच में छः संख्याएँ 10, 11, 12, 13, 14, 15 हैं जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं, उनकी संख्या दोनों वर्गों के अंतर से 1 कम है।

© NCERT not to be republished

हमारे पास $4^2 = 16$ और $5^2 = 25$ है।

अत: $5^2 - 4^2 = 9$

यहाँ $16(= 4^2)$ और $25(= 5^2)$ के बीच 17, 18, ... , 24 आठ संख्याएँ हैं जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं। उनकी संख्या दो वर्गों के अंतर से 1 कम है

7^2 और 6^2 को देखिए। क्या तुम कह सकते हो कि 6^2 और 7^2 के बीच कितनी संख्याएँ हैं?

यदि हम कोई प्राकृत संख्याएँ n और $(n + 1)$ लेते हैं तब

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$$

हम n^2 और $(n + 1)^2$ के बीच $2n$ संख्याएँ पाते हैं जो दो वर्ग संख्याओं के अंतर से 1 कम है।

व्यापक रूप से *हम कह सकते हैं कि दो वर्ग संख्याओं n और $(n + 1)$ के बीच $2n$ संख्याएँ हैं जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।* जाँच के लिए $n = 5$, $n = 6$ इत्यादि लें और इन्हें सत्यापित कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. 9^2 और 10^2 के बीच कितनी प्राकृत संख्याएँ हैं? 11^2 और 12^2 के बीच भी प्राकृत संख्याओं की संख्या बताइए।
2. निम्नलिखित संख्याओं के युग्मों के बीच की संख्या बताइए जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।
   (i) 100^2 और 101^2 (ii) 90^2 और 91^2 (iii) 1000^2 और 1001^2

3. विषम संख्याओं का जोड़

निम्न पर विचार कीजिए।

1 [एक विषम संख्या]	$= 1 = 1^2$
1 + 3 [पहली दो विषम संख्याओं का योग]	$= 4 = 2^2$
1 + 3 + 5 [पहली तीन विषम संख्याओं का योग]	$= 9 = 3^2$
1 + 3 + 5 + 7 [...]	$= 16 = 4^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 [...]	$= 25 = 5^2$
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 [...]	$= 36 = 6^2$

अत: हम कह सकते हैं कि *पहली n विषम प्राकृत संख्याओं का योग n^2 है।*

इसे अलग ढ़ंग से देखते हुए हम कह सकते हैं कि यदि एक संख्या, वर्ग संख्या है तो वह 1 से प्रारंभ होने वाली क्रमागत विषम संख्याओं का योग है।

अब इन संख्याओं पर विचार कीजिए जो पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हैं जैसे 2, 3, 5, 6, ... । क्या आप इन संख्याओं को 1 से प्रारंभ कर सभी क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिख सकते हैं?

आप पाएँगे कि इन संख्याओं को इस प्रकार नहीं लिख सकते हैं। संख्या 25 को लीजिए और इसमें से 1, 3, 5, 7, 9, ... को क्रम में घटाएँ :

(i) $25 - 1 = 24$ (ii) $24 - 3 = 21$ (iii) $21 - 5 = 16$ (iv) $16 - 7 = 9$
(v) $9 - 9 = 0$

अर्थात् यहाँ $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ है, अत: 25 एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

© NCERT not to be republished

अब एक दूसरी संख्या 38 को लीजिए और पुन: ऊपर जैसा कीजिए।

(i) $38 - 1 = 37$ (ii) $37 - 3 = 34$ (iii) $34 - 5 = 29$ (iv) $29 - 7 = 22$

(v) $22 - 9 = 13$ (vi) $13 - 11 = 2$ (vii) $2 - 13 = -11$

अत: यह दर्शाता है कि 38 को 1 से प्रारंभ होने वाली क्रमागत विषम संख्याओं के रूप में हम नहीं लिख सकते हैं और 38 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

अत: हम यह भी कह सकते हैं कि *यदि कोई प्राकृत संख्या 1 से प्रारंभ होने वाली क्रमागत विषम संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त नहीं हो सकती तो वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।*

एक संख्या पूर्ण है या नहीं यह जानने के लिए इस परिणाम का उपयोग कर सकते हैं।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं या नहीं?

(i) 121 (ii) 55 (iii) 81

(iv) 49 (v) 69

4. क्रमागत प्राकृत संख्याओं का योग

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

प्रथम संख्या $= \frac{3^2 - 1}{2}$

दूसरी संख्या $= \frac{3^2 + 1}{2}$

$3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

$7^2 = 49 = 24 + 25$

$9^2 = 81 = 40 + 41$

$11^2 = 121 = 60 + 61$

$15^2 = 225 = 112 + 113$

ओह! किसी भी विषम संख्या के वर्ग को दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों के योग के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित संख्याओं को दो क्रमागत पूर्णांकों के योग के रूप में लिखिए :

   (i) 21^2 (ii) 13^2 (iii) 11^2 (iv) 19^2

2. क्या आप सोचते हैं कि इसका विलोम सत्य है अर्थात् क्या दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का योग एक पूर्ण वर्ग होता है? अपने उत्तर के पक्ष में अपने एक उदाहरण दीजिए।

5. दो क्रमागत सम या विषम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल

$11 \times 13 = 143 = 12^2 - 1$

इस प्रकार $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1)$

अत: $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1) = 12^2 - 1$

इसी तरह $13 \times 15 = (14 - 1) \times (14 + 1) = 14^2 - 1$

$29 \times 31 = (30 - 1) \times (30 + 1) = 30^2 - 1$

$44 \times 46 = (45 - 1) \times (45 + 1) = 45^2 - 1$

अत: सामान्यत: हम कह सकते हैं कि $(a + 1) \times (a - 1) = a^2 - 1$

© NCERT not to be republished

6. वर्ग संख्याओं के कुछ और प्रतिरूप

संख्याओं के वर्गों का अवलोकन कीजिए 1, 11, 111 ... इत्यादि। ये एक सुंदर प्रतिरूप देते हैं।

$1^2 = 1$

$11^2 = 1\ 2\ 1$

$111^2 = 1\ 2\ 3\ 2\ 1$

$1111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1$

$11111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$

$11111111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$

प्रयास कीजिए

उपरोक्त प्रतिरूप का उपयोग करते हुए वर्ग संख्याएँ लिखिए :

(i) 111111^2 (ii) 1111111^2

प्रयास कीजिए

उपरोक्त प्रतिरूप का उपयोग करते हुए क्या आप निम्नलिखित संख्याओं का वर्ग ज्ञात कर सकते हैं?

(i) 6666667^2 (ii) 66666667^2

अन्य रोचक प्रतिरूप

$7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 44448889$

$66667^2 = 4444488889$

$666667^2 = 444444888889$

ऐसा क्यों होता है, यह जानना आपके लिए मनोरंजन पूर्ण हो सकता है। आपके लिए इस तरह के प्रश्नों के बारे में खोजना और सोचना रुचिकर होगा। भले ही ऐसे उत्तर कुछ समय बाद मिलें।

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के इकाई के अंक क्या होंगे?
   (i) 81 (ii) 272 (iii) 799 (iv) 3853
   (v) 1234 (vi) 26387 (vii) 52698 (viii) 99880
   (ix) 12796 (x) 55555
2. निम्नलिखित संख्याएँ स्पष्ट रूप से पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हैं, इसका कारण दीजिए।
   (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
   (v) 64000 (vi) 89722 (vii) 222000 (viii) 505050
3. निम्नलिखित संख्याओं में से किस संख्या का वर्ग विषम संख्या होगा?
   (i) 431 (ii) 2826 (iii) 7779 (iv) 82004
4. निम्न प्रतिरूप का अवलोकन कीजिए और रिक्त स्थान भरिए।

$11^2 = 121$

$101^2 = 10201$

$1001^2 = 1002001$

$100001^2 = 1 .... 2 .... 1$

$10000001^2 = ...$

© NCERT not to be republished

5. निम्न प्रतिरूप का अवलोकन कीजिए और रिक्त स्थान भरिए :

$$11^2 = 1\ 2\ 1$$
$$101^2 = 1\ 0\ 2\ 0\ 1$$
$$10101^2 = 102030201$$
$$1010101^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots^2 = 10203040504030201$$

6. दिए गए प्रतिरूप का उपयोग करते हुए लुप्त संख्याओं को प्राप्त कीजिए :

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + _^2 = 21^2$

$5^2 + _^2 + 30^2 = 31^2$

$6^2 + 7^2 + _^2 = __^2$

> **प्रतिरूप प्राप्त कीजिए :**
> तीसरी संख्या पहली और दूसरी से संबंधित है। कैसे? चौथी संख्या तीसरी संख्या से संबंधित है। कैसे?

7. योग संक्रिया किए बिना योगफल ज्ञात कीजिए :

(i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9

(ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + I1 + 13 + 15 + 17 +19

(iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23

8. (i) 49 को 7 विषम संख्याओं के योग के रूप में लिखिए।

(ii) 121 को 11 विषम संख्याओं के योग के रूप में लिखिए।

9. निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग के बीच में कितनी संख्याएँ हैं?

(i) 12 और 13 (ii) 25 और 26 (iii) 99 और 100

5.4 संख्याओं का वर्ग ज्ञात करना

छोटी संख्याएँ जैसे 3, 4, 5, 6, 7, ... इत्यादि का वर्ग ज्ञात करना सरल है। लेकिन क्या हम 23 का वर्ग इतनी शीघ्रता से प्राप्त कर सकते हैं?

इसका उत्तर इतना आसान नहीं है और हमें 23 को 23 से गुणा करने की आवश्यकता है।

इसे प्राप्त करने का एक तरीका है जो 23 × 23 को बिना गुणा किए प्राप्त होता है।

हम जानते हैं कि $23 = 20 + 3$

इसलिए $23^2 = (20 + 3)^2 = 20(20 + 3) + 3(20 + 3)$

$= 20^2 + 20 \times 3 + 3 \times 20 + 3^2$

$= 400 + 60 + 60 + 9 = 529$

उदाहरण 1 : निम्नलिखित संख्याओं का वर्ग गुणा किए बिना ज्ञात कीजिए :

(i) 39 (ii) 42

हल : (i) $39^2 = (30 + 9)^2 = 30(30 + 9) + 9(30 + 9)$

$= 30^2 + 30 \times 9 + 9 \times 30 + 9^2$

$= 900 + 270 + 270 + 81 = 1521$

(ii) $42^2 = (40 + 2)^2 = 40(40 + 2) + 2(40 + 2)$
$= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2$
$= 1600 + 80 + 80 + 4 = 1764$

एक ऐसी संख्या लीजिए जिसके इकाई स्थान पर अंक 5 हो, अर्थात् $a5$ ।

$(a5)^2 = (10a + 5)^2$
$= 10a(10a + 5) + 5(10a + 5)$
$= 100a^2 + 50a + 50a + 25$
$= 100a(a + 1) + 25$
$= a(a + 1)$ सैंकड़ा + 25

5.4.1 वर्ग के अन्य प्रतिरूप

निम्न प्रतिरूप को देखिए

$25^2 = 625 = (2 \times 3)$ सैकड़े + 25

$35^2 = 1225 = (3 \times 4)$ सैकड़े + 25

$75^2 = 5625 = (7 \times 8)$ सैकड़े + 25

$125^2 = 15625 = (12 \times 13)$ सैकड़े + 25

अब क्या आप 95 का वर्ग प्राप्त कर सकते हैं?

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए जिनके इकाई अंक 5 हैं।

(i) 15 (ii) 95 (iii) 105 (iv) 205

5.4.2 पाइथागोरस त्रिक

निम्न को लीजिए

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

संख्या 3, 4, 5 के समूह को **पाइथागोरस त्रिक** कहते हैं। 6, 8, 10 भी एक पाइथागोरस त्रिक है। इसी प्रकार

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

पुनः अवलोकन करें कि

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ । इसी प्रकार संख्याएँ 5, 12, 13 ऐसी ही दूसरी त्रिक है। क्या आप इस प्रकार के कुछ और त्रिक प्राप्त कर सकते हैं?

किसी प्राकृत संख्या $m > 1$ के लिए, हम पाते हैं $(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$। अतः $2m$, $m^2 - 1$ और $m^2 + 1$ पाइथागोरस त्रिक के रूप में हैं।

इस रूप का उपयोग करते हुए कुछ और पाइथागोरस त्रिक ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 2 : एक पाइथागोरस त्रिक लिखिए जिसकी सबसे छोटी संख्या 8 है।

हल : साधारण रूप $2m$, $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ से हम पाइथागोरस त्रिक पा सकते हैं।

पहले हम लेते हैं $m^2 - 1 = 8$

अतः $m^2 = 8 + 1 = 9$

$m = 3$

इसलिए $2m = 6$ और $m^2 + 1 = 10$

अतः 6, 8, 10 एक त्रिक है लेकिन 8 सबसे छोटी संख्या नहीं है।

इसलिए हम लेते हैं $2m = 8$

तब $m = 4$

$$m^2 - 1 = 16 - 1 = 15$$

और $m^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

अतः 8, 15, 17 एक ऐसा त्रिक है जहाँ 8 सबसे छोटी संख्या है।

उदाहरण 3 : एक पाइथागोरस त्रिक ज्ञात कीजिए जिसकी एक संख्या 12 है।

हल : यदि हम लेते हैं $m^2 - 1 = 12$

तब, $m^2 = 12 + 1 = 13$

यहाँ m का मान पूर्णांक नहीं होगा।

अतः हम कोशिश करते हैं $m^2 + 1 = 12$। पुनः $m^2 = 11$ जो m के लिए पूर्णांक मान नहीं देगा।

अतः हमें लेना चाहिए $2m = 12$

तब, $m = 6$

इस प्रकार $m^2 - 1 = 36 - 1 = 35$ और $m^2 + 1 = 36 + 1 = 37$

अतः आवश्यक त्रिक है 12, 35, 37

नोट : इस रूप का उपयोग करते हुए सभी पाइथागोरस त्रिक प्राप्त नहीं कर सकते हैं। उदाहरण के लिए दूसरी त्रिक 5, 12, 13 में भी 12 एक सदस्य हैं।

प्रश्नावली 5.2

1. निम्न संख्याओं का वर्ग ज्ञात कीजिए।
   (i) 32 (ii) 35 (iii) 86 (iv) 93
   (v) 71 (vi) 46

2. पाइथागोरस त्रिक लिखिए जिसका एक सदस्य है,
   (i) 6 (ii) 14 (iii) 16 (iv) 18

5.5 वर्गमूल

निम्न स्थितियों का अध्ययन कीजिए :

(a) वर्ग का क्षेत्रफल 144 cm^2 है। वर्ग की भुजा क्या होगी?

हम जानते हैं कि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा^{2} होता है।

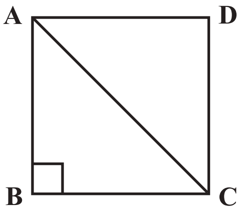
© NCERT not to be republished

यदि हम भुजा की लंबाई का मान 'a' लेते हैं, तब $144 = a^2$

भुजा की लंबाई ज्ञात करने के लिए आवश्यक है कि एक ऐसी संख्या ज्ञात करें जिसका वर्ग 144 है।

(b) एक वर्ग जिसकी भुजा 8 cm है, उसके विकर्ण की लंबाई क्या होगी (चित्र 5.1)?

इसको हल करने के लिए क्या हम पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग कर सकते हैं?



आकृति 5.1

हम जानते हैं $AB^2 + BC^2 = AC^2$

अर्थात् $8^2 + 8^2 = AC^2$

या $64 + 64 = AC^2$

या $128 = AC^2$

पुनः AC प्राप्त करने के लिए हमें एक ऐसी संख्या सोचनी है जिसका वर्ग 128 हो।

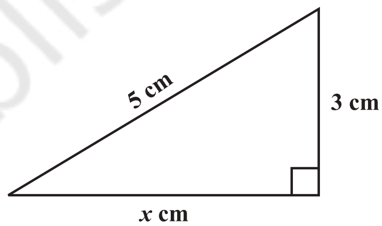
(c) एक समकोण त्रिभुज में कर्ण और एक भुजा क्रमशः 5 cm और 3 cm हैं। (चित्र 5.2) क्या आप तीसरी भुजा प्राप्त कर सकते हैं?

माना कि तीसरी भुजा की लंबाई x cm है।

पाइथागोरस प्रमेय के उपयोग से $5^2 = x^2 + 3^2$

$25 - 9 = x^2$

$16 = x^2$



आकृति 5.2

पुनः x का मान प्राप्त करने के लिए हमें एक संख्या की आवश्यकता है जिसका वर्ग 16 है। उपरोक्त सभी स्थितियों में हमें एक संख्या की आवश्यकता है, जिसका वर्ग ज्ञात हो, और उस संख्या को वर्गमूल के रूप में जाना जाता हो।

5.5.1 वर्गमूल ज्ञात करना

योग की प्रतिलोम (विपरीत) संक्रिया घटाना है और गुणा की प्रतिलोम संक्रिया भाग है। इसी तरह वर्गमूल प्राप्त करना भी वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।

हमें ज्ञात है $1^2 = 1$, अतः 1 का वर्गमूल 1 है।

$2^2 = 4$, अतः 4 का वर्गमूल 2 है।

$3^2 = 9$, अतः 9 का वर्गमूल 3 है।

> इसी प्रकार $9^2 = 81$,
> और $(-9)^2 = 81$
> हम कह सकते है कि 81 के वर्गमूल 9 और –9

प्रयास कीजिए

(i) $11^2 = 121$. 121 का वर्गमूल क्या है? (ii) $14^2 = 196$. 196 का वर्गमूल क्या है?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

$(-1)^2 = 1$. क्या 1 का वर्गमूल है –1? $(-2)^2 = 4$. क्या 4 का वर्गमूल है –2?

$(-9)^2 = 81$. क्या 81 का वर्गमूल है –9?

© NCERT not to be republished

उपरोक्त के अनुसार आप कह सकते हैं कि किसी पूर्ण वर्ग संख्या के दो समाकलित (एक साथ) वर्गमूल होते हैं। इस अध्याय में हम किसी प्राकृत संख्या के केवल धनात्मक वर्गमूल ही लेंगे। धनात्मक वर्गमूल संख्या को $\sqrt{\ }$ संकेत से व्यक्त करते हैं।
उदाहरणार्थ, $\sqrt{4} = 2$ (–2 नहीं); $\sqrt{9} = 3$ (–3 नहीं) इत्यादि।

कथन	निष्कर्ष
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$

कथन	निष्कर्ष
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$

5.5.2 घटाने की संक्रिया के द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना

क्या आपको याद है कि प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग n^2 है? अत: प्रत्येक वर्ग संख्या को 1 से प्रारंभ कर क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। $\sqrt{81}$ को लीजिए

(i) $81 - 1 = 80$ (ii) $80 - 3 = 77$ (iii) $77 - 5 = 72$ (iv) $72 - 7 = 65$
(v) $65 - 9 = 56$ (vi) $56 - 11 = 45$ (vii) $45 - 13 = 32$ (viii) $32 - 15 = 17$
(ix) $17 - 17 = 0$

संख्या 1 से क्रमागत विषम संख्याओं को 81 में रूप घटाने पर 9वाँ पद 0 प्राप्त होता है अत: $\sqrt{81} = 9$। इस नियम का उपयोग करते हुए क्या आप 729 का वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं? हाँ, लेकिन इसमें समय अधिक लगता है। अब हम एक सरल तरीके से वर्गमूल प्राप्त करने की कोशिश करते हैं।

प्रयास कीजिए

1 से प्रारंभ होने वाली विषम संख्याओं को बार-बार घटाने पर प्राप्त निम्नलिखित संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं या नहीं? यदि यह संख्या पूर्ण वर्ग हैं तो इसके वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
(i) 121 (ii) 55 (iii) 36
(iv) 49 (v) 90

5.5.3 अभाज्य गुणनखंडन के द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना

निम्न संख्याओं एवं उनके वर्गों को अभाज्य गुणनखंडन के रूप में लिखिए :

एक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन	इसके वर्ग का अभाज्य गुणनखंडन
$6 = 2 \times 3$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$15 = 3 \times 5$	$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
	3

6 के अभाज्य गुणनखंड में 2 कितनी बार आता है? एक बार । 36 के अभाज्य गुणनखंडन में 2 कितनी बार आता है? दो बार । इसी तरह 6 और 36 में 3 बार तथा 8 और 64 इत्यादि में 2 कितनी बार है?

© NCERT not to be republished

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

आप पाएँगे कि किसी संख्या के वर्ग के अभाज्य गुणनखंडों की संख्या उस संख्या के अभाज्य गुणनखंडों की संख्या की दुगुना होती है। आइए, हम एक दी गई वर्ग संख्या 324 का वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

हम जानते हैं कि 324 का अभाज्य गुणनखंडन

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

अभाज्य गुणनखंड के युग्म बनाने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$324 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} = 2^2 \times 3^2 \times 3^2 = (2 \times 3 \times 3)^2$$

अतः $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

इसी तरह क्या आप 256 का वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं? 256 का अभाज्य गुणनखंड है,

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

2	6400
2	3200
2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
	5

अभाज्य गुणनखंड में युग्म बनाने से हम पाते हैं?

$$256 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} = (2 \times 2 \times 2 \times 2)^2$$

अतः $\sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

क्या 48 एक पूर्ण वर्ग संख्या है?

हम जानते हैं, $48 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3$

यहाँ सारे गुणनखंड युग्म में नहीं हैं, अतः 48 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। कल्पना कीजिए कि हम 48 के सबसे छोटे गुणज ज्ञात करना चाहते हैं जो कि एक पूर्ण वर्ग संख्या हो। इसे कैसे करेंगे? 48 के अभाज्य गुणनखंड के युग्म बनाने पर देखते हैं कि केवल 3 एक संख्या है जो युग्म में नहीं बन पाती है अतः हमें युग्म को पूरा करने में 3 से गुणा करने की आवश्यकता है।

अतः $48 \times 3 = 144$ एक पूर्ण वर्ग है।

क्या आप कह सकते हैं कि 48 को किस संख्या से भाग दें कि पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो?

2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
	7

गुणज 3, युग्म में नहीं है। अतः हम 48 को यदि 3 से भाग दें तो हम $48 \div 3 = 16 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$ प्राप्त करेंगे और यह संख्या पूर्ण वर्ग भी है।

उदाहरण 4 : 6400 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए?

हल : लिखिए $6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$

अतः $\sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 80$

2	90
3	45
3	15
	5

उदाहरण 5 : क्या 90 एक पूर्ण वर्ग है?

हल : हम $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ रखते हैं।

अभाज्य गुणनखंड में 2 और 5 युग्म में नहीं हैं।

अतः 90 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। जिसे यथार्थ रूप में हम इस प्रकार भी देख सकते हैं क्योंकि इसमें केवल 1 शून्य है।

उदाहरण 6 : क्या 2352 एक पूर्ण वर्ग संख्या है? यदि नहीं तो 2352 का सबसे छोटा गुणज प्राप्त कीजिए जो कि पूर्ण वर्ग संख्या हो तथा नयी संख्या का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

हल : हम जानते हैं कि $2352 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

अभाज्य गुणनखंड के अनुसार 3 के युग्म नहीं हैं अत: 2352 एक पूर्ण वर्ग नहीं है। यदि 3 का एक जोड़ा बनाते हैं तब संख्या पूर्ण वर्ग हो जाएगी। अत: 2352 को 3 से गुणा करने पर हम पाएँगे :

$$2352 \times 3 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$$

अब प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड युग्म में हैं। अत: $2352 \times 3 = 7056$ एक पूर्ण वर्ग संख्या है। और 2352 का सबसे छोटा गुणज 7056 है जो एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

और $$\sqrt{7056} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$$

उदाहरण 7 : सबसे छोटी संख्या प्राप्त कीजिए जिसे 9408 से भाग देने पर भागफल एक पूर्ण वर्ग संख्या हो जाए। उस भागफल का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $9408 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

यदि हम 9408 को 3 से भाग देते हैं तब

$9408 \div 3 = 3136 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{7 \times 7}$ जो कि एक पूर्ण वर्ग संख्या हैं। (क्यों?)

अत: सबसे छोटी वांछित संख्या 3 है।

और $$\sqrt{3136} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$$

उदाहरण 8 : सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो प्रत्येक संख्या 6, 9 और 15 से विभाजित हो जाए।

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

हल : इसे दो चरण में हल कर सकते हैं। सबसे पहले छोटे उभयनिष्ठ गुणज को ज्ञात कीजिए और तब उसके बाद आवश्यक वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए। वह सबसे छोटी संख्या जिसमें 6, 9, 15 का भाग जाएगा, इनकी ल.स. है। 6, 9 और 15 का ल.स. है $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$।

90 का अभाज्य गुणनखंडन $90 = 2 \times \underline{3 \times 3} \times 5$ है।

हम देखते हैं कि अभाज्य गुणनखंड 2 और 5 के युग्म नहीं हैं। अत: 90 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त करने के लिए 90 के प्रत्येक गुणनखंड युग्म में होने चाहिए अत: हमें 2 और 5 का जोड़ा बनाने की आवश्यकता होगी। इसलिए 90 को 2×5, अर्थात् 10 से गुणा करना चाहिए। अत: वह वर्ग संख्या $90 \times 10 = 900$ है।

प्रश्नावली 5.3

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करने में इकाई अंक की क्या संभावना है।
   (i) 9801 (ii) 99856 (iii) 998001 (iv) 657666025
2. बिना गणना किए वह संख्या बताएँ जो वास्तव में पूर्ण वर्ग नहीं है।
   (i) 153 (ii) 257 (iii) 408 (iv) 441
3. बार-बार घटाने की विधि से 100 और 169 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
4. अभाज्य गुणनखंड विधि से निम्न संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात कीजिए :
   (i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096
   (v) 7744 (v) 9604 (vii) 5929 (viii) 9216
   (ix) 529 (x) 8100

© NCERT not to be republished

5. निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक के लिए वह सबसे छोटी पूर्ण संख्या ज्ञात कीजिए जिससे इस संख्या को गुणा करने पर यह एक पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

(i) 252 (ii) 180 (iii) 1008 (iv) 2028
(v) 1458 (vi) 768

6. निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक के लिए वह सबसे छोटी पूर्ण संख्या ज्ञात कीजिए जिससे इस संख्या को भाग देने पर वह एक पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस तरह ज्ञात की गई संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

(i) 252 (ii) 2925 (iii) 396 (iv) 2645
(v) 2800 (vi) 1620

7. एक विद्यालय में कक्षा VIII के सभी विद्यार्थियों ने प्रधानमंत्री राष्ट्रीय राहत कोष में 2401 रु दान में दिए। प्रत्येक विद्यार्थी ने उतने ही रुपये दान में दिए जितने कक्षा में विद्यार्थी थे। कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

8. एक बाग में 2025 पौधे इस प्रकार लगाए जाने हैं कि प्रत्येक पंक्ति में उतने ही पौधे हों, जितनी पंक्तियों की संख्या हो। पंक्तियों की संख्या और प्रत्येक पंक्ति में पौधों कि संख्या ज्ञात कीजिए।

9. वह सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 4, 9 और 10 प्रत्येक से विभाजित हो जाए।

10. वह सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो प्रत्येक 8, 15 और 20 से विभाजित हो जाए।

5.5.4 भागफल विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

जब संख्याएँ बड़ी हों तब अभाज्य गुणनखंड विधि से वर्गमूल ज्ञात करना लंबा और कठिन होता है। इस समस्या से निकलने के लिए हम दीर्घ विभाजन विधि का प्रयोग करते हैं।
इसके लिए हमें वर्गमूल में अंकों की संख्या को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

निम्नलिखित सारणी को देखिए :

संख्या	वर्ग	
10	100	जो 3 अंकों की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है।
31	961	जो 3 अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या है।
32	1024	जो 4 अंकों की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है।
99	9801	जो 4 अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या है।

अत: वर्गमूल में अंकों की संख्या के बारे में हम क्या कह सकते हैं यदि एक पूर्ण वर्ग संख्या 3 अंकों या 4 अंकों की हो?

हम कह सकते हैं कि यदि एक पूर्ण वर्ग संख्या 3 अंकों की या 4 अंकों की है तब इसका वर्गमूल 2 अंकों का होगा। क्या आप हमें 5 या 6 अंकों वाली संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या बता सकते हैं?

सबसे छोटी 3 अंकों की पूर्ण वर्ग संख्या 100 है जो कि 10 का वर्ग है और 3 अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या 961 है जो कि 31 का वर्ग है। सबसे छोटी 4 अंकों की पूर्ण वर्ग संख्या 1024 है जो 32 का वर्ग है और सबसे बड़ी 4 अंकों की संख्या 9801 है जो 99 का वर्ग है।

© NCERT not to be republished

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

क्या हम कह सकते हैं कि एक पूर्ण वर्ग संख्या में यदि n अंक है तो उसके वर्गमूल में $\frac{n}{2}$ अंक होंगे यदि n सम है या $\frac{(n+1)}{2}$ होंगे यदि n विषम हैं?

निम्न विधि किसी संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करने में उपयोगी होगी।

- 529 का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित चरणों पर विचार कीजिए।

  क्या आप इस संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या का अनुमान लगा सकते हैं?

चरण 1 इकाई स्थान से प्रारंभ करते हुए प्रत्येक युग्म पर बार लगाइए। यदि अंकों की संख्या विषम है तब बाएँ तरफ़ एक अंक पर बार लगाइए। $\overline{5}\,\overline{29}$ इस प्रकार लिखते हैं।

चरण 2 वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिसका वर्ग सबसे बाईं तरफ़ के बार के नीचे लिखी संख्या से कम या बराबर हो ($2^2 < 5 < 3^2$)। सबसे बाईं बार के नीचे भाज्य (यहाँ 5) के साथ भाजक और भागफल के रूप में इस संख्या को लीजिए। भाग कीजिए और शेषफल ज्ञात कीजिए (इस स्थिति में 1 है।)

```
      2
   ------
2 | 5 29
  | -4
  ------
  | 1
```

चरण 3 अगली बार के नीचे की संख्या को शेषफल के दाएँ लिखिए। (अर्थात् इस स्थिति में 29 है।) अतः अगली भाज्य 129 होगी।

```
      2
   ------
2 | 5 29
  | -4
  ------
  | 1 29
```

चरण 4 भाजक को दुगुना कीजिए और इसे इसके दाएँ में खाली स्थान के साथ लिखिए।

चरण 5 रिक्त स्थान को भरने के लिए सबसे बड़े संभावित अंक का अनुमान लगाइए जो कि भागफल में नया अंक होगा और नए भाजक को नए भागफल से गुणा करने पर गुणनफल भाज्य से कम या बराबर होगी।

```
       2
    ------
2  | 5 29
   | -4
   ------
4_ | 1 29
```

इस स्थिति में $42 \times 2 = 84$

चूँकि $43 \times 3 = 129$, अतः शेषफल प्राप्त करने के लिए नया अंक 3 चुनते हैं

चरण 6 क्योंकि शेषफल 0 है और दी गई संख्या में कोई अंक शेष नहीं है,

अतः $\sqrt{529} = 23$

```
       23
    ------
2  | 5 29
   | -4
   ------
43 | 1 29
   | -129
   ------
   | 0
```

- अब $\sqrt{4096}$ को हल कीजिए :

चरण 1 इकाई स्थान से प्रारंभ करते हुए प्रत्येक युग्म के ऊपर बार लगाइए ($\overline{40}\,\overline{96}$)।

चरण 2 एक सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जो सबसे बाईं तरफ़ के बार के नीचे लिखी संख्या से कम या बराबर हो ($6^2 < 40 < 7^2$)। इस संख्या को भाजक और सबसे बाईं तरफ बार के नीचे संख्या को भाज्य के रूप में लीजिए। भाग दीजिए और शेषफल (इस स्थिति में अर्थात् 4) ज्ञात कीजिए।

```
      6
   -------
6 | 40 96
  | -36
  -------
  | 4
```

© NCERT not to be republished

```
       6
   ┌──────
 6 │ 40 96
   │ –36
───┼──────
   │  496
```

चरण 3 अगली बार के नीचे लिखी संख्या (अर्थात् 96) को शेषफल के दाएँ लिखिए। नया भाज्य 496 होगा।

```
       6
   ┌──────
 6 │ 40 96
   │ –36
───┼──────
12_│  496
```

चरण 4 भाजक का दुगुना कीजिए और दाईं तरफ़ के रिक्त स्थान में लिखिए।

चरण 5 रिक्त स्थान को भरने के लिए सबसे बड़े संभावित अंक का अनुमान लगाइए जो अंक भागफल में नया होगा इस प्रकार नया अंक जब भागफल से गुणा होता है तब गुणनफल भाज्य से छोटा या बराबर होगा। इस स्थिति में हम देखते हैं कि $124 \times 4 = 496$ अत: भागफल में नया अंक 4 है। शेषफल ज्ञात कीजिए।

```
       64
    ┌──────
  6 │ 40 96
    │ –36
────┼──────
124 │  496
    │ –496
────┼──────
    │    0
```

चरण 6 चूँकि शेषफल शून्य है और कोई बार नहीं है अत: $\sqrt{4096} = 64$ है।

संख्या का अनुमान

पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करने के लिए बार का उपयोग करते हैं।

$$\sqrt{\overline{5}\,\overline{29}} = 23 \quad \text{और} \quad \sqrt{\overline{40}\,\overline{96}} = 64$$

इन दोनों संख्याओं 529 और 4096 में बार की संख्या 2 है, और उनके वर्गमूल में अंकों की संख्या 2 है।

क्या आप 14400 के वर्गमूल में अंकों की संख्या बता सकते हैं? बार लगाने पर हम $\overline{1}\,\overline{44}\,\overline{00}$ प्राप्त करते हैं। यद्यपि यहाँ पर बार की संख्या 3 है। अत: वर्गमूल 3 अंक का होगा।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल में अंकों की संख्या को गणना के बिना ज्ञात कीजिए।

(i) 25600 (ii) 100000000 (iii) 36864

उदाहरण 9 : वर्गमूल ज्ञात कीजिए : (i) 729 (ii) 1296

हल :

(i)
```
      27
    ┌──────
  2 │ 7 29
    │ –4
────┼──────
 47 │ 329
    │ 329
────┼──────
    │   0
```
इसलिए $\sqrt{729} = 27$

(ii)
```
      36
    ┌──────
  3 │ 12 96
    │ –9
────┼──────
 66 │ 396
    │ 396
────┼──────
    │   0
```
इसलिए $\sqrt{1296} = 36$

उदाहरण 10 : वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 5607 में से घटाने पर वह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

```
       74
    ┌──────
  7 │ 56 07
    │ –49
────┼──────
144 │  707
    │ –576
────┼──────
    │  131
```

हल : आइए, दीर्घ विभाजन विधि से $\sqrt{5607}$ ज्ञात करने का प्रयास करें। हमें 131 शेषफल प्राप्त होता है। यह दर्शाता है कि 74^2, 5607 से 131 कम है।

© NCERT not to be republished

अर्थात् यदि हम किसी संख्या में से उसका शेषफल घटा देते हैं तो हमें एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त होती है। अतः वांछित पूर्ण वर्ग संख्या है 5607 – 131 = 5476 और $\sqrt{5476} = 74$

उदाहरण 11 : चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या बताइए, जो पूर्ण वर्ग हो।

हल : चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 9999 है। हम दीर्घ विभाजन विधि द्वारा $\sqrt{9999}$ ज्ञात करते हैं, जिसका शेषफल 198 है। यह दर्शाता है 99^2, 9999 से 198 कम है।

	99
9	$\overline{99}\,\overline{99}$
	– 81
189	1899
	– 1701
	198

इसका अर्थ है कि यदि हम किसी संख्या में से शेषफल घटाते हैं तो हमें एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त होती है। अतः वांछित पूर्ण वर्ग संख्या है 9999 – 198 = 9801

और $\sqrt{9801} = 99$

उदाहरण 12 : वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 1300 में जोड़ने पर एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो। उस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

	36
3	$\overline{13}\,\overline{00}$
	– 9
66	400
	– 396
	4

हल : दीर्घ विभाजन विधि से $\sqrt{1300}$ ज्ञात करते हैं। यहाँ पर शेषफल 4 है। यह दर्शाता है कि $36^2 < 1300$

अगली पूर्ण वर्ग संख्या $37^2 = 1369$

अतः अभीष्ट संख्या = $37^2 - 1300 = 1369 - 1300 = 69$

5.6 दशमलव का वर्गमूल

संख्या $\sqrt{17.64}$ पर विचार कीजिए

चरण 1 दशमलव संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए हम पूर्ण संख्या पर सामान्य रूप से बार लगाते हैं। (अर्थात् 17) दशमलव भाग पर भी पहले दशमलव स्थान से प्रारंभ करके बार लगाते हैं और सामान्य रूप से आगे बढ़ते जाते हैं। हम $\overline{17}.\overline{64}$ पाते हैं।

चरण 2 अब इसी तरह से आगे बढ़ते हैं। 17 पर बार सबसे बाईं ओर है और $4^2 < 17 < 5^2$, इस संख्या को भाजक के रूप में लीजिए और सबसे बाईं बार के नीचे की संख्या भाज्य के रूप मे लीजिए (अर्थात् 17)। भाग दीजिए और शेषफल ज्ञात कीजिए।

	4
4	$\overline{17}.\overline{64}$
	– 16
	1

चरण 3 शेषफल 1 है। अगली बार के नीचे की संख्या अर्थात् 64 शेषफल के दाएँ लिखिए, 164 प्राप्त कीजिए।

	4
4	$\overline{17}.\overline{64}$
	– 16
8_	1 64

चरण 4 भाजक को दुगुना कीजिए और दाईं तरफ़ लिखिए। पहले 64 दशमलव भाग में था अतः भागफल में दशमलव रखिए।

	4.
4	17.64
	– 16
82	164

चरण 5 हम जानते हैं कि 82 × 2 = 164, अतः नई संख्या 2 है। भाग दीजिए और शेषफल ज्ञात कीजिए।

	4.2
4	17.64
	–16
82	164
	– 164
	0

चरण 6 अतः शेषफल 0 है। अब शेष कोई बार नहीं है, अतः $\sqrt{17.64} = 4.2$

© NCERT not to be republished

उदाहरण 13 : 12.25 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

	3.5
3	$\overline{12}.\overline{25}$
	– 9
65	325
	325
	0

अतः $\sqrt{12.25} = 3.5$

किस तरफ़ बढ़ें

संख्या 176.341 पर ध्यान दीजिए। पूर्ण संख्या और दशमलव संख्या के दोनों भागों पर बार लगाइये। दशमलव भाग में क्या तरीका है, जो पूर्ण भाग से भिन्न है? 176 पर ध्यान दीजिए हम दशमलव के पास के इकाई स्थान से प्रारंभ करके बाईं तरफ़ जाते हैं। प्रथम बार 76 के ऊपर और दूसरा बार 1 के उपर है। .341 के लिए, हम दशमलव से प्रारंभ करके दाईं तरफ़ जाते हैं। पहला बार 34 के उपर और दूसरा बार लगाने के लिए हम 1 के बाद 0 रखते हैं और इस प्रकार $.\overline{34}\overline{10}$ बनाते हैं।

	48
4	$\overline{23}\overline{04}$
	–16
88	704
	704
	0

उदाहरण 14 : एक वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 2304 m^2 है। इस वर्गाकार क्षेत्र की भुजा ज्ञात कीजिए।

हल : वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = 2304 m^2

इसलिए, वर्गाकार क्षेत्र की भुजा = $\sqrt{2304}$ m^2

हम पाएंगे कि $\sqrt{2304}$ = 48 m

इस प्रकार वर्गाकार क्षेत्र की भुजा 48 m है।

उदाहरण 15 : एक विद्यालय में 2401 विद्यार्थी हैं। पी.टी. अध्यापक उन्हें पंक्ति एवं स्तंभ में इस प्रकार खड़ा रखना चाहते हैं कि पंक्तियों की संख्या स्तंभ की संख्या के बराबर हो। पंक्तियों की संख्या ज्ञात करो।

	49
4	$\overline{24}\,\overline{01}$
	16
89	801
	801
	0

हल : माना कि पंक्तियों की संख्या x है।

अतः स्तंभ की संख्या = x

इसलिए, विद्यार्थियों की संख्या = $x \times x = x^2$

अतः $x^2 = 2401$ अर्थात् $x = \sqrt{2401} = 49$ होता है।

पंक्तियों की संख्या = 49

प्रश्नावली 5.4

1. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल, भाग विधि से ज्ञात कीजिए :

(i) 2304	(ii) 4489	(iii) 3481	(iv) 529
(v) 3249	(vi) 1369	(vii) 5776	(viii) 7921
(ix) 576	(x) 1024	(xi) 3136	(xii) 900

© NCERT not to be republished

2. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक के वर्गमूल के अंको की संख्या ज्ञात कीजिए : (बिना गणना के)

(i) 64 (ii) 144 (iii) 4489 (iv) 27225
(v) 390625

3. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84 (iv) 42.25
(v) 31.36

4. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में न्यूनतम संख्या क्या घटाई जाए कि एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए :

(i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250 (iv) 825
(v) 4000

5. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में कम से कम कितना जोड़ा जाए कि एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए :

(i) 525 (ii) 1750 (iii) 252 (iv) 1825
(v) 6412

6. किसी वर्ग की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 441 m^2 है।

7. किसी समकोण त्रिभुज ABC में, $\angle B = 90°$

(a) यदि $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, है तो AC ज्ञात कीजिए।

(b) यदि $AC = 13$ cm, $BC = 5$ cm, है तो AB ज्ञात कीजिए।

8. एक माली के पास 1000 पौधे हैं। इन पौधों को वह इस प्रकार लगाना चाहता है कि पंक्तियों की संख्या और कॉलम की संख्या समान रहे। इसके लिए कम से कम पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए जिसकी उसे आवश्यकता हो।

9. एक विद्यालय में 500 विद्यार्थी हैं। पी.टी. के अभ्यास के लिए इन्हें इस तरह से खड़ा किया गया कि पंक्तियों की संख्या कॉलम की संख्या के समान रहे। इस व्यवस्था को बनाने में कितने विद्यार्थियों को बाहर जाना होगा?

© NCERT not to be republished

हमने क्या चर्चा की?

1. यदि एक प्राकृत संख्या m को n^2 के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ n भी एक प्राकृत संख्या है, तब m एक **वर्ग संख्या** है।
2. सभी वर्ग संख्याओं के अंत में इकाई स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 या 9 होता है।
3. वर्ग संख्याओं के अंत में शून्यों की संख्या केवल सम होती है।
4. वर्गमूल, वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।
5. एक पूर्ण वर्ग संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल होते हैं।

   धनात्मक वर्गमूल को संकेत $\sqrt{\ }$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

   उदाहरणार्थ, $3^2 = 9$, $\sqrt{9} = 3$ होता है।

© NCERT not to be republished

अध्याय

6

घन और घनमूल

0853CH07

6.1 भूमिका

यह कहानी भारत की महान गणितीय प्रतिभावान विभूतियों में से एक एस. रामानुजन के बारे में है। एक बार एक अन्य प्रसिद्ध गणितज्ञ प्रोफ़ेसर जी. एच. हार्डी उनसे मिलने एक टैक्सी में आए जिसका नंबर 1729 था। रामानुजन से बात करते समय, हार्डी ने इस संख्या को 'एक नीरस' (dull) संख्या बताया। रामानुजन ने तुरंत बताया कि 1729 वास्तव में एक रोचक संख्या थी। उन्होंने कहा कि यह ऐसी सबसे छोटी संख्या है जिसे दो घनों (cubes) के योग के रूप में दो भिन्न प्रकारों से व्यक्त किया जा सकता है:

$$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$$

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$$

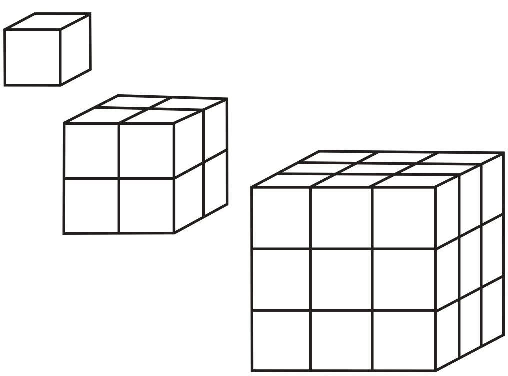
तब से इस संख्या 1729 को हार्डी-रामानुजन संख्या (Hardy - Ramanujan Number) कहा जाने लगा, यद्यपि 1729 की यह विशेषता रामानुजन से लगभग 300 वर्ष पूर्व भी ज्ञात थी।

हार्डी-रामानुजन संख्या
1729 सबसे छोटी हार्डी-रामानुजन संख्या है। इस प्रकार की अनेक संख्याएँ हैं : उनमें से कुछ हैं 4104 (2, 16; 9, 15), 13832 (18, 20; 2, 024)। कोष्ठकों में दी हुई संख्याएँ लेकर इसकी जाँच कीजिए।

रामानुजन को इसकी जानकारी कैसे थी? वह संख्याओं से प्यार करते थे। अपने संपूर्ण जीवन में, वे संख्याओं के साथ प्रयोग करते रहे। संभवत: उन्होंने वे संख्याएँ ज्ञात की होंगी जिन्हें दो वर्गों के योग और साथ ही दो घनों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता था।

वे आकृतियाँ जिनकी 3 विमाएँ (dimensions) होती हैं, ठोस आकृतियाँ कहलाती हैं।

घनों के अनेक दूसरे रोचक प्रतिरूप (patterns) हैं। आइए, हम घनों, घनमूलों (cube roots) तथा इनसे संबंधित अनेक रोचक तथ्यों के बारे में सीखें।



6.2 घन

आप जानते हैं कि शब्द 'घन' का प्रयोग ज्यामिति में किया जाता है। घन एक ऐसी ठोस आकृति है, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं। 1 cm भुजा वाले कितने घनों से 2 cm भुजा वाला एक घन बनेगा? 1 cm भुजा वाले कितने घनों से 3 cm भुजा वाला एक घन बनेगा?

© NCERT not to be republished

संख्याओं 1, 8, 27, ... पर विचार कीजिए, ये **पूर्ण घन (perfect cubes) या घन संख्याएँ (cube numbers)** कहलाती हैं। क्या आप बता सकते हैं कि इनको ये नाम क्यों दिए गए हैं? इनमें से प्रत्येक संख्या तब प्राप्त होती है, जब एक संख्या को तीन बार लेकर गुणा किया जाता है।

हम देखते हैं कि $1 = 1\times1\times1 = 1^3$, $8 = 2\times2\times2 = 2^3$, $27 = 3\times3\times3 = 3^3$ है।

क्योंकि $5^3 = 5\times5\times5 = 125$ है, इसलिए 125 एक घन संख्या है। क्या 9 एक घन संख्या है? नहीं, क्योंकि $9 = 3 \times 3$ है और ऐसी कोई प्राकृत संख्या नहीं है जिसे तीन बार लेकर गुणा करने पर 9 प्राप्त हो। हम जानते हैं कि $2\times2\times2 = 8$ और $3\times3\times3 = 27$ है। इससे यह प्रदर्शित होता है कि 9 एक पूर्ण घन नहीं है। नीचे 1 से 10 तक की संख्याओं के घन दिए गए हैं:

सारणी 1

संख्या	घन
1	$1^3 = 1$
2	$2^3 = 8$
3	$3^3 = 27$
4	$4^3 = 64$
5	$5^3 =$ _____
6	$6^3 =$ _____
7	$7^3 =$ _____
8	$8^3 =$ _____
9	$9^3 =$ _____
10	$10^3 =$ _____

संख्याएँ 729, 1000, 1728 भी पूर्ण घन हैं।

पूर्ण कीजिए।

यहाँ आप देख सकते हैं कि 1 से 1000 तक केवल दस पूर्ण घन हैं। (इसकी जाँच कीजिए) 1 से 100 तक कितने पूर्ण घन हैं? सम संख्याओं के घनों को देखिए। क्या ये सभी सम हैं? आप विषम संख्याओं के घनों के बारे में क्या कह सकते हैं? अब 11 से 20 तक की संख्याओं के घन नीचे दिए जा रहे हैं:

सारणी 2

संख्या	घन
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

हम सम हैं और हमारे घन भी सम हैं।

हम विषम हैं और हमारे घन भी विषम हैं।

© NCERT not to be republished

ऐसी कुछ संख्याओं पर विचार कीजिए जिनकी इकाई का अंक 1 है। इनमें से प्रत्येक संख्या का घन ज्ञात कीजिए। उस संख्या के घन के इकाई के अंक के बारे में आप क्या कह सकते हैं, जिसकी इकाई का अंक 1 है?

इसी प्रकार, उन संख्याओं के घनों की इकाई के अंकों के बारे में पता कीजिए, जिनकी इकाई के अंक 2, 3, 4 इत्यादि हैं।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक के घन के इकाई का अंक ज्ञात कीजिए :

(i) 3331 (ii) 8888 (iii) 149 (iv) 1005
(v) 1024 (vi) 77 (vii) 5022 (viii) 53

6.2.1 कुछ रोचक प्रतिरूप

1. क्रमागत विषम संख्याओं को जोड़ना

विषम संख्याओं के योगों के निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए :

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

क्या यह रोचक नहीं है? योग 10^3 प्राप्त करने के लिए कितनी क्रमागत विषम संख्याओं की आवश्यकता होगी?

प्रयास कीजिए

उपरोक्त प्रतिरूप का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित संख्याओं को विषम संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त कीजिए :

(a) 6^3 (b) 8^3 (c) 7^3

निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए :

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$$
$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$$
$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$$

उपरोक्त प्रतिरूप का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $7^3 - 6^3$ (ii) $12^3 - 11^3$ (iii) $20^3 - 19^3$ (iv) $51^3 - 50^3$

2. घन और उनके अभाज्य गुणनखंड

कुछ संख्याओं और उनके घनों के निम्नलिखित अभाज्य गुणनखंडनों पर विचार कीजिए :

एक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन	उसके घन का अभाज्य गुणनखंडन
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

स्वयं के घन में प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड तीन बार आता है।

© NCERT not to be republished

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

ध्यान दीजिए कि एक संख्या का प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड उस संख्या के घन के अभाज्य गुणनखंडन् में तीन बार आता है।

क्या आपको याद है कि $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ होता है?

यदि किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में प्रत्येक गुणनखंड तीन बार आता है, तो क्या वह संख्या एक पूर्ण घन होती है? इसके बारे में सोचिए! क्या 216 एक पूर्ण घन है?

अभाज्य गुणनखंड द्वारा, $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

प्रत्येक गुणनखंड तीन बार आता है। $216 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$ जो एक पूर्ण घन है।

क्या 729 एक पूर्ण घन है? $729 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

गुणनखंडों के तीन-तीन के समूह बनाए जा सकते हैं।

हाँ, 729 एक पूर्ण घन है।

आइए, अब 500 के लिए इसकी जाँच करें।

500 का अभाज्य गुणनखंडन है : $2 \times 2 \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

इसलिए 500 एक पूर्ण घन नहीं है।

इस गुणनफल में तीन बार 5 है, परंतु केवल दो 2 बार है।

उदाहरण 1 : क्या 243 एक पूर्ण घन है?

हल : $243 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times 3 \times 3$

यहाँ 3 का एक त्रिक बनाने के बाद 3×3 शेष रहता है। अतः, 243 एक पूर्ण घन नहीं है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ पूर्ण घन हैं?

(i)	400	(ii)	3375
(iii)	8000	(iv)	15625
(v)	9000	(vi)	6859
(vii)	2025	(viii)	10648

6.2.2 सबसे छोटा गुणज जो पूर्ण घन है

राज ने प्लास्टिसिन (plasticine) का एक घनाभ (cuboid) बनाया। इस घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 15 cm, 30 cm और 15 cm है।

अनु उससे पूछती है कि एक (पूर्ण) घन बनाने के लिए उसे ऐसे कितने घनाभों की आवश्यकता होगी? क्या आप बता सकते हैं?

राज कहता है,

घनाभ का आयतन $= 15 \times 30 \times 15$

$= 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

क्योंकि उपरोक्त अभाज्य गुणनखंडन में केवल एक बार 2 है, इसलिए हमें इसे पूर्ण घन बनाने के लिए $2 \times 2 = 4$ की आवश्यकता होगी। अतः हमें एक घन बनाने के लिए ऐसे चार घनाभों की आवश्यकता होगी।

उदाहरण 2 : क्या 392 एक पूर्ण घन है? यदि नहीं, तो ऐसी सबसे छोटी प्राकृत संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 392 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।

हल : $392 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7 \times 7$

अभाज्य गुणनखंड 7 तीन के समूह में नहीं आ रहा है। अतः 392 एक पूर्ण घन नहीं है। इसे पूर्ण घन बनाने के लिए, एक और 7 की आवश्यकता है। इस स्थिति में,

$392 \times 7 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2744$, जो एक पूर्ण घन है।

© NCERT not to be republished

अतः वह सबसे छोटी प्राकृत संख्या 7 है, जिसे 392 से गुणा करने पर एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाएगा।

उदाहरण 3 : क्या 53240 एक पूर्ण घन है? यदि नहीं, तो 53240 को किस सबसे छोटी प्राकृत संख्या से भाग दिया जाए कि भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो?

हल : $53240 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11} \times 5$

यहाँ अभाज्य गुणनखंड में 5 तीन के समूह में नहीं आ रहा है। अतः 53240 एक पूर्ण घन नहीं है।

उपरोक्त गुणनखंडन में 5 केवल एक बार आया है। यदि हम दी हुई संख्या को 5 से भाग दें, तो भागफल के अभाज्य गुणनखंडन में 5 नहीं आएगा।

इस प्रकार, $53240 \div 5 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

अतः वह सबसे छोटी प्राकृत संख्या 5 है जिससे 53240 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त होगा।

उस स्थिति में, पूर्ण घन 10648 होगा।

उदाहरण 4 : क्या 1188 एक पूर्ण घन है? यदि नहीं, तो किस सबसे छोटी प्राकृत संख्या से 1188 को भाग दिया जाए कि भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए?

हल : $1188 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 11$

अभाज्य गुणनखंड 2 और 11 तीन-तीन के समूहों में नहीं आ रहे हैं। अतः 1188 एक पूर्ण घन नहीं है। 1188 के उपरोक्त गुणनखंडन में, अभाज्य 2 केवल दो बार आ रहा है और अभाज्य 11 एक बार। अतः यदि हम 1188 को $2 \times 2 \times 11 = 44$ से भाग दें, तो भागफल के अभाज्य गुणनखंडन में 2 और 11 नहीं आएँगे।

अतः वह सबसे छोटी प्राकृत संख्या 44 है, जिससे 1188 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त होगा। साथ ही, परिणामी पूर्ण घन $= 1188 \div 44 = 27\ (=3^3)$

उदाहरण 5 : क्या 68600 एक पूर्ण घन है? यदि नहीं, तो वह सबसे छोटी प्राकृत संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 68,600 को गुणा करने पर एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए?

हल : हमें प्राप्त है: $68,600 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

इस गुणनखंडन में, 5 की कोई त्रिक (triplet) नहीं है। अतः 68,600 एक पूर्ण घन नहीं है। इसे पूर्ण घन बनाने के लिए, हम इसे 5 से गुणा करते हैं।

इस प्रकार, $68,600 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 3,43,000$ जो एक पूर्ण घन है।

ध्यान दीजिए कि 343 एक पूर्ण घन है। उदाहरण 5 से, हम जानते हैं कि 3,43,000 भी एक पूर्ण घन है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

जाँच कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ पूर्ण घन हैं : (i) 2700 (ii) 16000 (iii) 64000 (iv) 900 (v) 125000 (vi) 36000 (vii) 21600 (viii) 10,000 (ix) 27000000 (x) 1000 इन पूर्ण घनों में आप क्या प्रतिरूप देखते हैं?

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ पूर्ण घन नहीं हैं?
   (i) 216 (ii) 128 (iii) 1000 (iv) 100 (v) 46656
2. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे निम्नलिखित संख्याओं को गुणा करने पर पूर्ण घन प्राप्त हो जाए :
   (i) 243 (ii) 256 (iii) 72 (iv) 675 (v) 100
3. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे निम्नलिखित संख्याओं को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए :
   (i) 81 (ii) 128 (iii) 135 (iv) 192 (v) 704
4. परीक्षित प्लास्टिसिन का एक घनाभ बनाता है, जिसकी भुजाएँ 5 cm, 2 cm और 5 cm हैं। एक घन बनाने के लिए ऐसे कितने घनाभों की आवश्यकता होगी?

6.3 घनमूल

यदि किसी घन का आयतन 125 cm^3 है, तो उसकी भुजा की लंबाई क्या होगी? इस घन की भुजा की लंबाई ज्ञात करने के लिए हमें एक ऐसी संख्या ज्ञात करनी होगी, जिसका घन 125 हो।

जैसा कि आप जानते हैं कि 'वर्गमूल' ज्ञात करना 'वर्ग करने की संक्रिया की प्रतिलोम संक्रिया है।' इसी प्रकार 'घनमूल' (cuberoot) ज्ञात करने की संक्रिया घन (ज्ञात) करने की संक्रिया की प्रतिलोम संक्रिया है।

हम जानते हैं कि $2^3 = 8$ है। इसलिए हम कहते हैं कि 8 का घनमूल (cuberoot) 2 है।

हम इसे $\sqrt[3]{8} = 2$ लिखते हैं। संकेत '$\sqrt[3]{\ }$' घनमूल को व्यक्त करता है।

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

कथन	निष्कर्ष
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$

कथन	निष्कर्ष
$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

6.3.1 अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा घनमूल

संख्या 3375 पर विचार कीजिए। हम इसका घनमूल अभाज्य गुणनखंडन द्वारा ज्ञात करेंगे :

$$3375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3$$

अतः 3375 का घनमूल $= \sqrt[3]{3375} = 3 \times 5 = 15$

© NCERT not to be republished

इसी प्रकार, $\sqrt[3]{74088}$ ज्ञात करने के लिए, हमें प्राप्त है :

$74088 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2^3 \times 3^3 \times 7^3 = (2 \times 3 \times 7)^3$

अतः $\sqrt[3]{74088} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

उदाहरण 6 : 8,000 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : 8,000 का अभाज्य गुणनखंड $\underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$ है।

अतः $\sqrt[3]{8000} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

उदाहरण 7 : अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा 13824 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $13824 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

अतः $\sqrt[3]{13824} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

बताइए कि सत्य है या असत्य : किसी पूर्णांक m के लिए, $m^2 < m^3$ होता है। क्यों?

प्रश्नावली 6.2

1. अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा निम्नलिखित में से प्रत्येक संख्या का घनमूल ज्ञात कीजिए :
   (i) 64 (ii) 512 (iii) 10648 (iv) 27000
   (v) 15625 (vi) 13824 (vii) 110592 (viii) 46656
   (ix) 175616 (x) 91125

2. बताइए सत्य है या असत्य :
   (i) किसी भी विषम संख्या का घन सम होता है।
   (ii) एक पूर्ण घन दो शून्यों पर समाप्त नहीं होता है।
   (iii) यदि किसी संख्या का वर्ग 5 पर समाप्त होता है, तो उसका घन 25 पर समाप्त होता है।
   (iv) ऐसा कोई पूर्ण घन नहीं है जो 8 पर समाप्त होता है।
   (v) दो अंकों की संख्या का घन तीन अंकों वाली संख्या हो सकती है।
   (vi) दो अंकों की संख्या के घन में सात या अधिक अंक हो सकते हैं।
   (vii) एक अंक वाली संख्या का घन एक अंक वाली संख्या हो सकती है।

हमने क्या चर्चा की?

1. संख्याएँ, जैसे कि 1729, 4104, 13832 हार्डी–रामानुजन संख्याएँ कहलाती हैं। इन्हें दो घनों के योग के रूप में दो भिन्न प्रकारों से व्यक्त किया जा सकता है।
2. एक संख्या को स्वयं से ही तीन बार गुणा करने पर प्राप्त संख्या **घन संख्या** कहलाती है। उदाहरणार्थ 1, 8, 27 इत्यादि।
3. यदि किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड तीन बार आता है, तो वह संख्या एक पूर्ण घन होती है।
4. संकेत '$\sqrt[3]{\ }$' घनमूल को व्यक्त करता है। उदाहरणार्थ, $\sqrt[3]{27} = 3$ है।

© NCERT not to be republished

नोट

© NCERT not to be republished

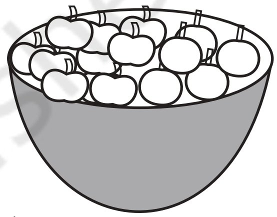
अध्याय

7

राशियों की तुलना

0853CH08

7.1 अनुपात एवं प्रतिशत का स्मरण



हम जानते हैं कि अनुपात का अर्थ है दो मात्राओं की तुलना करना।

एक टोकरी में दो प्रकार के फल हैं, मान लीजिए इनमें 20 सेब और 5 संतरे हैं।

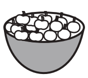
तो, संतरों की संख्या का सेबों की संख्या से अनुपात = 5 : 20 है।

यह तुलना भिन्नों की सहायता से $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ के रूप में भी की जा सकती है।

संतरों की संख्या सेबों की संख्या का $\frac{1}{4}$ है। अनुपात के रूप में यह 1 : 4 है और इसे '4 की तुलना में 1 है' पढ़ा जाता है। अथवा

संतरों की तुलना में सेबों की संख्या $= \frac{20}{5} = \frac{4}{1}$ है, जिसका अर्थ है कि संतरों की तुलना में सेबों की संख्या 4 गुना है। यह तुलना प्रतिशत के उपयोग से भी की जा सकती है।

25 फलों में 5 संतरे हैं। इसलिए संतरों का प्रतिशत $\frac{5}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{100} = 20\%$ है। (हर को 100 बनाया गया है)	अथवा	ऐकिक विधि से : 25 फलों में संतरों की संख्या 5 है, इसलिए, 100 फलों में संतरों की संख्या $= \frac{5}{25} \times 100 = 20\%$ है।

क्योंकि  में केवल सेब और संतरे हैं,

इसलिए, सेबों का प्रतिशत + संतरों का प्रतिशत = 100

अथवा सेबों का प्रतिशत + 20 = 100

अथवा सेबों का प्रतिशत = 100 – 20 = 80

अतः टोकरी में 20% संतरे और 80% सेब हैं।

उदाहरण 1 : किसी विद्यालय में कक्षा VII के लिए पिकनिक की योजना बनाई जा रही है। विद्यार्थियों की कुल संख्या का 60% लड़कियाँ हैं और इनकी संख्या 18 है। पिकनिक का स्थान विद्यालय से 55 km दूर है और परिवहन कंपनी ₹ 12 प्रति km की दर से किराया लेती है। अल्पाहार (जलपान) का कुल खर्च ₹ 4280 होगा।

© NCERT not to be republished

क्या आप बता सकते हैं :

1. कक्षा में लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से अनुपात?
2. यदि दो अध्यापक भी कक्षा के साथ पिकनिक पर जा रहे हैं तो प्रति व्यक्ति खर्च?
3. यदि उनका पहला स्टॉप विद्यालय से 22 km की दूरी पर है तो वह कुल 55 km की दूरी का कितने प्रतिशत है? कितने प्रतिशत दूरी तय करना शेष है?

हल :

1. लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से अनुपात ज्ञात करने के लिए, आशिमा और जॉन ने निम्नलिखित विधियाँ प्रयोग कीं। उन्हें लड़कों की संख्या और कुल विद्यार्थियों की संख्या जानने की आवश्यकता थी।

आशिमा ने निम्नलिखित विधि का उपयोग किया :

मान लीजिए कुल विद्यार्थियों की संख्या x है, जिसमें 60% लड़कियाँ हैं।

इसलिए x का 60% = 18

या $\frac{60}{100} \times x = 18$

अर्थात् $x = \frac{18 \times 100}{60} = 30$

विद्यार्थियों की कुल संख्या = 30

जॉन ने ऐकिक विधि का उपयोग किया :

100 विद्यार्थियों में से 60 लड़कियाँ हैं।

इसलिए $\frac{100}{60}$ विद्यार्थियों में एक लड़की है।

इसलिए कितने विद्यार्थियों में 18 लड़कियाँ होंगी?

विद्यार्थियों की संख्या $= \frac{100}{60} \times 18 = 30$

इसलिए, लड़कों की संख्या = 30 – 18 = 12 है। अत: लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से 18 : 12 अथवा $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ का अनुपात है। $\frac{3}{2}$ को 3 : 2 के रूप में लिखा जाता है और 2 की तुलना में 3 पढ़ा जाता है।

2. प्रति व्यक्ति खर्च ज्ञात करने के लिए :

यातायात खर्च = दोनों तरफ़ की दूरी × दर
= (55 × 2) × ₹ 12
= 110 × 12 = ₹ 1320

कुल खर्च = अल्पाहार खर्च + यातायात खर्च
= ₹ 4280 + ₹ 1320
= ₹ 5600

कुल व्यक्ति = 18 लड़कियाँ + 12 लड़के + 2 अध्यापक
= 32 व्यक्ति

आशिमा और जॉन ने प्रति व्यक्ति खर्च ज्ञात करने के लिए ऐकिक विधि का उपयोग किया। 32 व्यक्तियों के लिए खर्च किए जाने वाली राशि ₹ 5600 होगी।

इसलिए 1 व्यक्ति के लिए खर्च की जाने वाली राशि = ₹ $\frac{5600}{32}$ = ₹ 175

3. प्रथम स्टॉप की दूरी = 22 km

दूरी का प्रतिशत ज्ञात करने के लिए :

आशिमा ने यह विधि उपयोग की :

$$\frac{22}{55} = \frac{22}{55} \times \frac{100}{100} = 40\%$$

(वह अनुपात को $\frac{100}{100} = 1$ से गुणा कर रही है और प्रतिशत में बदल रही है)

जॉन ने ऐकिक विधि उपयोग की :

55 km में से 22 km दूरी तय की जा चुकी है।

1 km में से $\frac{22}{55}$ km दूरी तय की गई है।

100 km में से $\frac{22}{55} \times 100$ km दूरी तय की गई है। अर्थात् 40% दूरी तय की गई है।

दोनों का उत्तर एक जैसा पाया गया और उनका उत्तर इस प्रकार है :

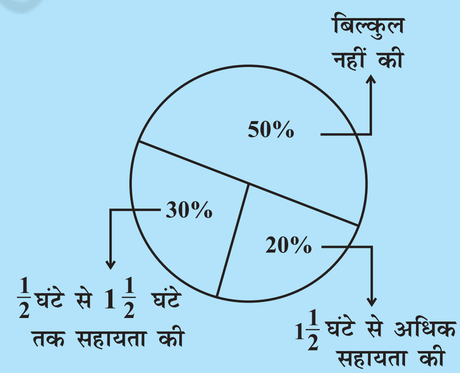
रुकने वाले स्थान की विद्यालय से दूरी कुल तय की जाने वाली दूरी का 40% था।

इसलिए, तय की जाने वाली शेष दूरी का प्रतिशत = 100% – 40% = 60%

प्रयास कीजिए

एक प्राथमिक विद्यालय में अभिभावकों से पूछा गया कि वे अपने बच्चों के गृहकार्य में सहायता करने के लिए प्रतिदिन कितने घंटे व्यतीत करते हैं। 90 अभिभावकों ने $\frac{1}{2}$ घंटे से $1\frac{1}{2}$ घंटे तक सहायता की। जितने समय के लिए अभिभावकों ने अपने बच्चों की सहायता करना बताया उसके अनुसार अभिभावकों का वितरण संलग्न आकृति में दिखाया गया है जो इस प्रकार है :

20% ने प्रतिदिन $1\frac{1}{2}$ घंटे से अधिक सहायता की, 30% ने $\frac{1}{2}$ घंटे से $1\frac{1}{2}$ घंटे तक सहायता की, 50% ने बिल्कुल सहायता नहीं की।



इसके आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) कितने अभिभावकों का सर्वे किया गया?

(ii) कितने अभिभावकों ने कहा कि उन्होंने सहायता नहीं की?

(iii) कितने अभिभावकों ने कहा कि उन्होंने $1\frac{1}{2}$ घंटे से अधिक सहायता की?

प्रश्नावली 7.1

1. निम्नलिखित का अनुपात ज्ञात कीजिए :
   (a) एक साइकिल की 15 km प्रतिघंटे की गति का एक स्कूटर की 30 km प्रतिघंटे की गति से।
   (b) 5 m का 10 km से
   (c) 50 पैसे का ₹ 5 से
2. निम्नलिखित अनुपातों को प्रतिशत में परिवर्तित कीजिए : (a) 3 : 4 (b) 2 : 3
3. 25 विद्यार्थियों में से 72% विद्यार्थी गणित में रुचि रखते हैं। कितने प्रतिशत विद्यार्थी गणित में रुचि नहीं रखते हैं?
4. एक फुटबॉल टीम ने कुल जितने मैच खेले उनमें से 10 में जीत हासिल की। यदि उनकी जीत का प्रतिशत 40 था तो उस टीम ने कुल कितने मैच खेले?

© NCERT not to be republished

5. यदि चमेली के पास अपने धन का 75% खर्च करने के बाद ₹ 600 बचे तो ज्ञात कीजिए कि उसके पास शुरू में कितने ₹ थे?

6. यदि किसी शहर में 60% व्यक्ति क्रिकेट पसंद करते हैं, 30% फुटबाल पसंद करते हैं और शेष अन्य खेल पसंद करते हैं, तो ज्ञात कीजिए कि कितने प्रतिशत व्यक्ति अन्य खेल पसंद करते हैं? यदि कुल व्यक्ति 50 लाख हैं तो प्रत्येक प्रकार के खेल को पसंद करने वाले व्यक्तियों की यथार्थ संख्या ज्ञात कीजिए।

7.2 बट्टा ज्ञात करना

किसी वस्तु के अंकित मूल्य में दी जाने वाली छूट को **बट्टा** कहते हैं। यह सामान्यतः ग्राहकों को खरीदारी के लिए आकर्षित करने के लिए अथवा सामान की बिक्री में वृद्धि करने के लिए दिया जाता है। आप अंकित मूल्य में से विक्रय मूल्य को घटाकर बट्टा ज्ञात कर सकते हैं। इसलिए, बट्टा = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

उदाहरण 2 : ₹ 840 अंकित मूल्य वाली एक वस्तु ₹ 714 में बेची जाती है। बट्टा और बट्टा प्रतिशत कितना है?

हल : बट्टा = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

= ₹ 840 – ₹ 714 = ₹ 126

क्योंकि बट्टा अंकित मूल्य पर है इसलिए हमें अंकित मूल्य को आधार मानना पड़ेगा।

₹ 840 अंकित मूल्य पर ₹ 126 बट्टा है,

तो ₹ 100 अंकित मूल्य पर कितना बट्टा होगा?

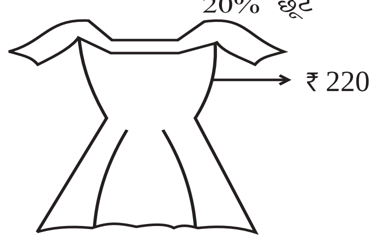
$$\text{बट्टा} = \frac{126}{840} \times 100\,\% = 15\%$$

यदि बट्टा प्रतिशत दिया हुआ है तो आप बट्टा भी ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : एक फ्रॉक का सूची मूल्य ₹ 220 है। सेल में 20% बट्टे की घोषणा की जाती है। इस फ्राक पर बट्टे की राशि क्या है और इसका विक्रय मूल्य क्या है?

हल : अंकित मूल्य और सूची मूल्य समान होते हैं।

20% बट्टे का अर्थ है कि ₹ 100 अंकित मूल्य पर ₹ 20 बट्टा है।



ऐकिक विधि से ₹ 1 पर ₹ $\frac{20}{100}$ का बट्टा होगा।

₹ 220 पर बट्टा $= \frac{20}{100} \times$ ₹ 220 = ₹ 44

विक्रय मूल्य = (₹ 220 – ₹ 44) अथवा ₹ 176

रेहाना ने इस समस्या को इस प्रकार हल किया :

20% बट्टे का अर्थ है कि ₹ 100 अंकित मूल्य पर ₹ 20 का बट्टा है। अतः विक्रय मूल्य ₹ 80 है। ऐकिक विधि के उपयोग से,

जब अंकित मूल्य ₹ 100 है तो विक्रय मूल्य = ₹ 80

© NCERT not to be republished

जब अंकित मूल्य ₹ 1 है तो विक्रय मूल्य = ₹ $\frac{80}{100}$

अतः जब अंकित मूल्य ₹ 220 है तो विक्रय मूल्य = $\frac{80}{100}$ × ₹ 220 = ₹ 176

प्रयास कीजिए

1. एक दुकान 20% बट्टा देती है। निम्नलिखित में से प्रत्येक का विक्रय मूल्य क्या होगा?
   (a) ₹ 120 अंकित मूल्य वाली एक पोशाक।
   (b) ₹ 750 अंकित मूल्य वाले एक जोड़ी जूते।
   (c) ₹ 250 अंकित मूल्य वाला एक थैला।
2. ₹ 15000 अंकित मूल्य वाली एक मेज ₹ 14,400 में उपलब्ध है। बट्टा और बट्टा प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
3. एक अलमारी 5% बट्टे पर ₹ 5225 में बेची जाती है। अलमारी का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

7.2.1 प्रतिशत में आकलन

एक दुकान पर आपका बिल ₹ 577.80 है और दुकानदार 15% बट्टा भी प्रदान करता है। आप भुगतान की जाने वाली राशि का आकलन कैसे करेंगे?

(i) बिल को ₹ 577.80 की निकटतम दहाई में पूर्णांकित कीजिए अर्थात् ₹ 580।

(ii) इसका 10% ज्ञात कीजिए, अर्थात् $\frac{10}{100}\times$ ₹ 580 = ₹ 58

(iii) इसका आधा लीजिए, अर्थात्, $\frac{1}{2}\times 58$ = ₹ 29

(iv) (ii) और (iii) की राशियों को जोड़िए। जोड़ने पर ₹ 87 प्राप्त होते हैं।
इसलिए आप अपने बिल की राशि को ₹ 87 अथवा ₹ 85 कम कर सकते हैं। इस प्रकार बिल की राशि का सन्निकट मान ₹ 495 होगा।

1. इसी बिल राशि का 20% बट्टे से आकलन करने का प्रयास कीजिए।
2. ₹ 375 का 15% ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

7.3 बिक्री कर / Value Added Tax (वैट) / माल और सेवा कर (Goods and Services Tax)

अध्यापक ने कक्षा में एक बिल दिखाया जिसमें निम्नलिखित शीर्षक लिखे हुए थे :

बिल संख्या			दिनांक	
मेनू				
क्र. सं.	वस्तु	मात्रा	दर	राशि
		बिल राशि + बिक्री कर (5%)		
	कुल योग			

© NCERT not to be republished

किसी वस्तु की बिक्री पर बिक्री कर **Sales Tax** या **ST** सरकार द्वारा वसूला जाता है। यह दुकानदार द्वारा ग्राहक से लिया जाता है और सरकार को दिया जाता है। इसलिए यह हमेशा वस्तु के विक्रय मूल्य पर लगता है और बिल की राशि में जोड़ दिया जाता है। एक अन्य प्रकार का कर है जो वस्तु के मूल्य में **(Value Added Tax)** वैल्यू एडेड कर **(VAT)** के नाम से जुड़ता है।

1 जुलाई 2017 से, भारत सरकार ने जी.एस.टी. **(GST)** लागू किया है, जो माल और सेवा कर का संक्षिप्त रूप है। यह कर माल की आपूर्ति या सेवा या दोनों पर लगाया जाता है।

उदाहरण 4 : (बिक्री कर ज्ञात करना) किसी दुकान पर एक जोड़ी रोलर स्केट्स (पहियों पर घूमने वाला जूता) का मूल्य ₹ 450 था। वसूले गए बिक्री कर की दर 5% थी। बिल की देय राशि ज्ञात कीजिए।

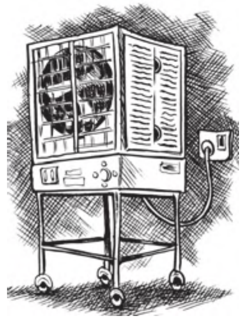
हल : ₹ 100 पर भुगतान किया गया कर ₹ 5 था।

₹ 450 पर भुगतान किए जाने वाला कर होगा $\frac{5}{100} \times$ ₹ 450 = ₹ 22.50

बिल की देय राशि = क्रय मूल्य + बिक्री कर

= ₹ 450 + ₹ 22.50 = ₹ 472.50

उदाहरण 5 : वैट (**Value Added Tax (VAT)**) वहीदा ने एक कूलर 10% कर सहित ₹ 3300 में खरीदा। वैट के जुड़ने से पहले का कूलर का मूल्य ज्ञात कीजिए।



हल : मूल्य में वैट भी शामिल है।

अत: 10% वैट का अर्थ है कि यदि वैट रहित मूल्य ₹ 100 है तो वैट सहित मूल्य ₹ 110 है।

अब यदि वैट सहित मूल्य ₹ 110 है तो वास्तविक मूल्य ₹ 100 है।

अत: जब कर सहित मूल्य ₹ 3300 है तो वास्तविक मूल्य = $\frac{100}{110} \times$ ₹ 3300 = ₹ 3000

उदाहरण 6 : सलीम ने एक वस्तु ₹ 784 में खरीदी जिसमें 12% जी.एस.टी. सम्मिलित था। जी.एस.टी. जोड़ने से पहले वस्तु का मुल्य क्या था?

हल : मान लीजिए कि वस्तु का प्रारंभिक मूल्य ₹ 100 है। जी.एस.टी. = 12% । जी.एस.टी. सम्मिलित करने पर मूल्य = ₹ (100 + 12) = ₹ 112 । जब बिक्री मूल्य ₹ 112 है तो प्रारंभिक मूल्य = ₹ 100 है।

अत: जब विक्रय मूल्य ₹ 784 है, तो प्रारंभिक मूल्य = ₹ $\frac{100}{112} \times 784$ = ₹ 700

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. किसी संख्या को दुगुना करने पर उस संख्या में 100% वृद्धि होती है। यदि हम उस संख्या को आधा कर दें तो कितना प्रतिशत ह्रास होगा?
2. ₹ 2400 की तुलना में ₹ 2000 कितना प्रतिशत कम है? क्या यह प्रतिशत उतना ही है, जितना ₹ 2000 की तुलना में ₹ 2400 अधिक है?

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 7.2

1. सेल के दौरान एक दुकान सभी वस्तुओं के अंकित मूल्य पर 10% बट्टा देती है। ₹ 1450 अंकित मूल्य वाला एक जीन्स और दो कमीजें, जिनमें से प्रत्येक का अंकित मूल्य ₹ 850 है, को खरीदने के लिए किसी ग्राहक को कितना भुगतान करना पड़ेगा?
2. एक टेलीविज़न का मूल्य ₹ 13,000 है। इस पर 12% की दर से बिक्री कर वसूला जाता है। यदि विनोद इस टेलीविज़न को खरीदता है तो उसके द्वारा भुगतान की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।
3. अरुण एक जोड़ी स्केट्स (पहियेदार जूते) किसी सेल से खरीदकर लाया जिस पर दिए गए बट्टे की दर 20% थी। यदि उसके द्वारा भुगतान की गई राशि ₹ 1600 है तो अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।
4. मैंने एक हेयर ड्रायर 8% वैट सहित ₹ 5400 में खरीदा। वैट को जोड़ने से पहले का उसका मूल्य ज्ञात कीजिए।
5. कोई वस्तु 18% जी.एस.टी. सम्मिलित करने के बाद ₹ 1239 में खरीदी गई। जी.एस.टी. जोड़ने से पहले का उस वस्तु का मूल्य ज्ञात कीजिए।

7.4 चक्रवृद्धि ब्याज

शायद आपको इस प्रकार के कथन मिले होंगे 'बैंक में FD (सावधि जमा) पर एक वर्ष का ब्याज 9% वार्षिक की दर से' या 'बचत खाते पर ब्याज की दर 5% वार्षिक'।

> बैंक अथवा डाकघर जैसी संस्थाओं के पास जमा किए गए धन पर इन संस्थाओं द्वारा भुगतान किया गया अतिरिक्त धन **ब्याज** कहलाता है। जब व्यक्ति धन उधार लेते हैं तो उनके द्वारा भी ब्याज का भुगतान किया जाता है। हम **साधारण ब्याज** का परिकलन करना पहले से ही जानते हैं।

उदाहरण 7 : ₹ 10,000 की राशि 15% वार्षिक ब्याज दर पर 2 वर्ष के लिए उधार ली जाती है। इस राशि पर साधारण ब्याज और 2 वर्ष के अंत में भुगतान की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।

हल : ₹ 100 पर 1 वर्ष के लिए देय ब्याज ₹ 15 है।

इसलिए 10,000 का 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{15}{100} \times 10000$ = ₹ 1500

2 वर्ष का ब्याज = ₹ 1500 × 2 = ₹ 3000

2 वर्ष के अंत में भुगतान की जाने वाली राशि = मूलधन + ब्याज

= ₹ 10000 + ₹ 3000 = ₹ 13000

प्रयास कीजिए

5% वार्षिक दर से ₹ 15000 का 2 वर्ष के अंत में ब्याज और भुगतान की जाने वाली कुल राशि ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

मेरे पिताजी ने कुछ धन 3 वर्ष के लिए डाकघर में जमा करा रखा है। प्रत्येक वर्ष धन की वृद्धि पिछले वर्ष की तुलना में अधिक होती है।

हमारे पास बैंक में कुछ धन है। प्रतिवर्ष कुछ ब्याज इस धन में जुड़ जाता है जिसे पासबुक में दर्शाया जाता है। जुड़ने वाला यह ब्याज हर वर्ष एक समान नहीं है, प्रत्येक वर्ष इसमें वृद्धि होती है।

सामान्यत: लिया जाने वाला अथवा भुगतान किए जाने वाला ब्याज कभी साधारण नहीं होता है। ब्याज का परिकलन पिछले वर्ष की राशि पर किया जाता है। इसे ब्याज का संयोजन अथवा **चक्रवृद्धि ब्याज** (C.I.) कहा जाता है।

आइए, हम एक उदाहरण पर चर्चा करते हैं और प्रत्येक वर्ष का अलग-अलग ब्याज ज्ञात करते हैं। प्रत्येक वर्ष हमारी जमा राशि अथवा मूलधन परिवर्तित होता है।

चक्रवृद्धि ब्याज का परिकलन

8% ब्याज की दर से हिना 2 वर्ष के लिए ₹ 20,000 उधार लेती है जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है। 2 वर्ष के अंत में चक्रवृद्धि ब्याज एवं उसके द्वारा भुगतान की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।

असलम ने अध्यापक से पूछा कि क्या इसका अर्थ यह है कि उन्हें प्रत्येक वर्ष का ब्याज अलग-अलग ज्ञात करना चाहिए। अध्यापक ने कहा 'हाँ' और उसे निम्नलिखित चरणों का उपयोग करने के लिए सुझाव दिया :

1. एक वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए मान लीजिए प्रथम वर्ष का मूलधन P_1 है।

   यहाँ, P_1 = ₹ 20,000

   SI_1 = 8% वार्षिक दर से प्रथम वर्ष का साधारण ब्याज

   $= ₹ \dfrac{20000 \times 8}{100}$ = ₹ 1600

2. तत्पश्चात् भुगतान की जाने वाली अथवा प्राप्त की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए। यह दूसरे वर्ष के लिए मूलधन बन जाता है।

   प्रथम वर्ष के अंत में राशि $= P_1 + SI_1$ = ₹ 20000 + ₹ 1600

   = ₹ 21600 = P_2 (दूसरे वर्ष का मूलधन)

3. इस राशि पर दूसरे वर्ष का ब्याज ज्ञात कीजिए।

   SI_2 = 8% वार्षिक दर से दूसरे वर्ष का साधारण ब्याज

   $= ₹ \dfrac{21600 \times 8}{100}$ = ₹ 1728

© NCERT not to be republished

4. दूसरे वर्ष के अंत में भुगतान की जाने वाली अथवा प्राप्त की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।

दूसरे वर्ष के अंत में राशि $= P_2 + SI_2$
= ₹ 21600 + ₹ 1728
= ₹ 23328

कुल देय ब्याज = ₹ 1600 + ₹ 1728
= ₹ 3328

रीता ने पूछा कि क्या ब्याज की राशि साधारण ब्याज के लिए भिन्न होगी। अध्यापक ने उसे 2 वर्ष का साधारण ब्याज निकालने के लिए और स्वयं अंतर महसूस करने के लिए सुझाव दिया।

$$2 \text{ वर्ष का साधारण ब्याज} = ₹\ \frac{20000 \times 8 \times 2}{100} = ₹\ 3200$$

रीता ने कहा कि चक्रवृद्धि ब्याज के कारण हिना को ₹ 128 का अधिक भुगतान करना पड़ेगा। आइए, अब हम साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज में अंतर देखते हैं। ₹ 100 से शुरू करते हैं। चार्ट को पूरा करने का प्रयास कीजिए :

		साधारण ब्याज के अंतर्गत	**चक्रवृद्धि ब्याज के अंतर्गत**
प्रथम वर्ष	मूलधन	₹ 100.00	₹ 100.00
	10% की दर से ब्याज	₹ 10.00	₹ 10.00
	वर्ष के अंत में राशि	₹ 110.00	₹ 110.00
द्वितीय वर्ष	मूलधन	₹ 100.00	₹ 110.00
	10% की दर से ब्याज	₹ 10.00	₹ 11.00
	वर्ष के अंत में राशि	₹ (110 + 10) = ₹120.00	₹ 121.00
तृतीय वर्ष	मूलधन	₹ 100.00	₹ 121.00
	10% की दर से ब्याज	₹ 10.00	₹ 12.10
	वर्ष के अंत में राशि	₹ (120 + 10) = ₹ 130.00	₹ 133.10

इसका अर्थ यह हुआ कि आप उस समय तक जमा ब्याज पर ब्याज देते हैं।

ध्यान दीजिए कि 3 वर्ष में,

साधारण ब्याज से प्राप्त ब्याज = ₹ (130 – 100) = ₹ 30

चक्रवृद्धि ब्याज से प्राप्त ब्याज = ₹ (133.10 – 100) = ₹ 33.10

यह भी ध्यान दीजिए कि साधारण ब्याज के अंतर्गत प्रत्येक वर्ष मूलधन समान रहता है जबकि चक्रवृद्धि ब्याज के अंतर्गत यह प्रत्येक वर्ष के बाद बदलता जाता है।

© NCERT not to be republished

7.5 चक्रवृद्धि ब्याज के लिए सूत्र का निगमन करना

जुबेदा ने अपने अध्यापक से पूछा, 'क्या चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने की कोई सरल विधि है?' अध्यापक ने कहा, 'चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने की एक संक्षिप्त विधि है। आइए, इसे ज्ञात करने का प्रयास करते हैं।'

मान लीजिए R% वार्षिक ब्याज की दर से मूलधन P_1 पर ब्याज वार्षिक संयोजित होता है। मान लीजिए P_1 = ₹ 5000 और R = 5 वार्षिक, तब उपर्युक्त चरणों की सहायता से :

1. $SI_1 = ₹\ \frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ अथवा $SI_1 = ₹\ \frac{P_1 \times R \times 1}{100}$

इसलिए, $A_1 = 5000 + ₹\ \frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ अथवा $A_1 = P_1 + SI_1 = P_1 + \frac{P_1 R}{100}$

$= 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right) = ₹\ P_2$ $\qquad = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) = P_2$

2. $SI_2 = 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right) \times ₹\ \frac{5 \times 1}{100}$ अथवा $SI_2 = \frac{P_2 \times R \times 1}{100}$

$= ₹\ \frac{5000 \times 5}{100}\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ $\qquad = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) \times \frac{R}{100}$

$\qquad = \frac{P_1 R}{100}\left(1 + \frac{R}{100}\right)$

$A_2 = 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right) + ₹\ \frac{5000 \times 5}{100}\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ $\qquad A_2 = P_2 + SI_2 = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) + P_1 \frac{R}{100}\left(1 + \frac{R}{100}\right)$

$= ₹\ 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right)\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ $\qquad = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)\left(1 + \frac{R}{100}\right)$

$= ₹\ 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 = P_3$ $\qquad = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 = P_3$

इसी प्रकार आगे बढ़ते हुए n वर्ष के अंत में कुल राशि

$$A_n = P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$$ होगी।

अथवा हम कह सकते हैं कि $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

जुबेदा ने कहा लेकिन इसका उपयोग करते हुए हम केवल n वर्ष के अंत में देय कुल राशि का सूत्र प्राप्त करते हैं, न कि चक्रवृद्धि ब्याज का सूत्र। अरुणा ने तुरंत कहा कि हम जानते हैं :

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = \text{कुल राशि} - \text{मूलधन}$$

अर्थात् $CI = A - P$, इसलिए हम चक्रवृद्धि ब्याज भी आसानी से ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 8 : ₹ 12,600 का 2 वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है।

हल : हमें प्राप्त है, $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

यहाँ मूलधन (P) = ₹ 12600, दर (R) = ₹ 10

वर्षों की संख्या (n) = 2A = ₹ $12600\left(1+\frac{10}{100}\right)^2$ = ₹ $12600\left(\frac{11}{10}\right)^2$

$$= ₹\ 12600 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} = ₹\ 15246$$

चक्रवृद्धि ब्याज (CI) = A – P = ₹ 15246 – ₹ 12600 = ₹ 2646

प्रयास कीजिए

1. ₹ 8000 का 2 वर्ष के लिए 5% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए यदि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है।

7.6 चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र के अनुप्रयोग

कुछ ऐसी स्थितियाँ हैं जहाँ पर हम चक्रवृद्धि ब्याज के कुल राशि ज्ञात करने के सूत्र का उपयोग कर सकते हैं। इनमें से कुछ निम्नलिखित हैं :

(i) जनसंख्या में वृद्धि (अथवा ह्रास)

(ii) यदि बैक्टीरिया वृद्धि की दर ज्ञात है तो उनकी कुल वृद्धि ज्ञात करना।

(iii) किसी वस्तु का मान ज्ञात करना यदि मध्यवर्ती वर्षों में इसके मूल्य में वृद्धि अथवा कमी होती है।

उदाहरण 9 : वर्ष 1997 के अंत में किसी शहर की जनसंख्या 20,000 थी। इसमें 5% वार्षिक दर से वृद्धि हुई। वर्ष 2000 के अंत में उस शहर की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

हल : प्रत्येक वर्ष जनसंख्या में 5% की वृद्धि होती है, इसलिए प्रत्येक नए वर्ष की नई जनसंख्या होती है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि यह संयोजित रूप में बढ़ रही है।

© NCERT not to be republished

1998 के शुरू में जनसंख्या = 20, 000 (इसे हम प्रथम वर्ष के लिए मूलधन मानते हैं)

इसे दूसरे वर्ष के लिए मूलधन मान लीजिए।

$$5\% \text{ की दर से वृद्धि } = \frac{5}{100} \times 20,000 = 1000$$

$$\text{वर्ष 1999 की जनसंख्या } = 20000 + 1000 = 21000$$

$$5\% \text{ की दर से वृद्धि } = \frac{5}{100} \times 21000 = 1050$$

$$\text{वर्ष 2000 में जनसंख्या } = 21000 + 1050 = 22050$$

इसे तीसरे वर्ष के लिए मूलधन समझ लीजिए।

$$5\% \text{ की दर से वृद्धि } = \frac{5}{100} \times 22050 = 1102.5$$

$$\text{वर्ष 2000 के अंत में जनसंख्या } = 22050 + 1102.5 = 23152.5$$

अथवा सूत्र की सहायता से वर्ष 2000 के अंत में जनसंख्या $= 20000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$

$$= 20000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} = 23152.5$$

इसलिए, लगभग जनसंख्या = 23,153

अरुणा ने पूछा, यदि जनसंख्या में कमी होती है तो क्या करना है। तब अध्यापक ने निम्नलिखित उदाहरण की चर्चा की।

उदाहरण 10 : एक T.V. ₹ 21,000 में खरीदा गया। एक वर्ष पश्चात् T.V. के मूल्य में 5% अवमूल्यन हो गया (अवमूल्यन का अर्थ है वस्तु के उपयोग और उम्र के कारण उसके मूल्य में कमी होना)। एक वर्ष पश्चात् T.V. का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : मूलधन = ₹ 21,000

अवमूल्यन (कमी) = प्रतिवर्ष ₹ 21,000 का 5%

$$= ₹\ \frac{21,000 \times 5 \times 1}{100} = ₹\ 1050$$

एक वर्ष के अंत में T.V. का मूल्य = ₹ 21,000 – ₹ 1050 = ₹ 19,950

विकल्पतः, हम इसे निम्नलिखित विधि से सीधे प्राप्त कर सकते हैं

$$1 \text{ वर्ष के अंत में मूल्य } = ₹\ 21,000\left(1-\frac{5}{100}\right)$$

$$= ₹\ 21,000 \times \frac{19}{20} = ₹\ 19,950$$

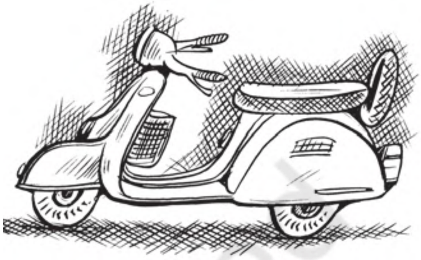
प्रयास कीजिए

1. ₹ 10,500 मूल्य की एक मशीन का 5% की दर से अवमूल्यन होता है। एक वर्ष पश्चात् इसका मूल्य ज्ञात कीजिए।
2. एक शहर की वर्तमान जनसंख्या 12 लाख है यदि वृद्धि की दर 4% है तो 2 वर्ष पश्चात् शहर की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 7.3

1. 5% वार्षिक दर से बढ़ते हुए वर्ष 2003 के अंत में एक स्थान की जनसंख्या 54,000 हो गई। निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :
   (i) वर्ष 2001 में जनसंख्या
   (ii) वर्ष 2005 में कितनी जनसंख्या होगी?
2. एक प्रयोगशाला में, किसी निश्चित प्रयोग में बैक्टीरिया की संख्या 2.5% प्रति घंटे की दर से बढ़ रही है। यदि प्रयोग के शुरू में बैक्टीरिया की संख्या 5,06,000 थी तो 2 घंटे के अंत में बैक्टीरिया की संख्या ज्ञात कीजिए।
3. एक स्कूटर ₹ 42,000 में खरीदा गया। 8% वार्षिक दर से इसके मूल्य का अवमूल्यन हो गया। 1 वर्ष के बाद स्कूटर का मूल्य ज्ञात कीजिए।



हमने क्या चर्चा की?

1. अंकित मूल्य पर दी गई छूट **बट्टा** कहलाती है।
   बट्टा = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य
2. यदि बट्टा प्रतिशत दिया हुआ है तो बट्टे का परिकलन किया जा सकता है। बट्टा = अंकित मूल्य का बट्टा प्रतिशत।
3. किसी वस्तु को खरीदने के बाद उस पर किए गए अतिरिक्त खर्चे क्रय मूल्य में शामिल कर लिए जाते हैं और ये खर्चे **ऊपरी खर्चे** कहलाते हैं। क्रय मूल्य = खरीद मूल्य + ऊपरी खर्चे
4. किसी वस्तु को बेचने पर सरकार द्वारा बिक्री कर लिया जाता है और इसे बिल की राशि में जोड़ दिया जाता है। बिक्री कर = बिल राशि का कर %
5. जी.एस.टी. माल और सेवा कर का संक्षिप्त रूप है। यह कर माल की आपूर्ति या सेवा या दोनों पर लगाया जाता है।
6. पिछले वर्ष की कुल राशि (A = P + I) पर परिकलित किया गया ब्याज चक्रवृद्धि ब्याज कहलाता है।

नोट

© NCERT not to be republished

अध्याय

8

बीजीय व्यंजक एवं सर्वसमिकाएँ

0853CH09

8.1 बीजीय व्यंजकों का योग एवं व्यवकलन

पिछली कक्षाओं में हम बीजीय व्यंजकों (अथवा केवल व्यंजकों) के बारे में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं। $x + 3$, $2y - 5$, $3x^2$, $4xy + 7$ इत्यादि व्यंजकों के उदाहरण हैं।

पिछली कक्षाओं में हमने यह भी सीखा है कि बीजीय व्यंजकों को कैसे जोड़ा और घटाया जाता है, उदाहरणार्थ $7x^2 - 4x + 5$ एवं $9x - 10$, को जोड़ने के लिए हम इस प्रकार करते हैं :

$$\begin{array}{rrrr} & 7x^2 & -\ 4x & +\ 5 \\ + & & 9x & -\ 10 \\ \hline & 7x^2 & +\ 5x & -\ 5 \end{array}$$

विचार कीजिए कि हम योगफल कैसे ज्ञात करते हैं। जोड़े जाने वाले प्रत्येक व्यंजक को हम विभिन्न पंक्तियों में लिखते हैं। ऐसा करते समय हम समान पदों को एक दूसरे के ऊपर-नीचे लिखते हैं और, जैसा ऊपर दर्शाया गया है, हम उन समान पदों को जोड़ते हैं। अत: $5 + (-10) = 5 - 10 = -5$ इसी प्रकार, $-4x + 9x = (-4 + 9)x = 5x$. आइए कुछ और उदाहरण हल करते हैं।

उदाहरण 1 : $7xy + 5yz - 3zx$, $4yz + 9zx - 4y$, $-3xz + 5x - 2xy$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल : समान पदों को एक दूसरे के ऊपर-नीचे रखकर तीन व्यंजकों को विभिन्न पंक्तियों में लिखते हुए, हम प्राप्त करते हैं :

$$\begin{array}{rrrrrr} & 7xy & +\ 5yz & -3zx & & \\ + & & 4yz & +\ 9zx & & -\ 4y \\ + & -2xy & & -\ 3zx & +\ 5x & \\ \hline & 5xy & +\ 9yz & +3zx & +\ 5x & -\ 4y \end{array}$$

(ध्यान दीजिए xz और zx एक समान हैं)

इस प्रकार व्यंजकों का योग $5xy + 9yz + 3zx + 5x - 4y$ है। ध्यान दीजिए दूसरे व्यंजक के पद $-4y$ और तीसरे व्यंजक के पद $5x$ को योगफल में वैसे ही लिखा गया है जैसे वे हैं क्योंकि दूसरे व्यंजकों में उनका कोई समान पद नहीं है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 2 : $7x^2 - 4xy + 8y^2 + 5x - 3y$ में से $5x^2 - 4y^2 + 6y - 3$ को घटाइए।

हल :

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & 7x^2 & - 4xy & + 8y^2 & + 5x & - 3y & \\
 & 5x^2 & & - 4y^2 & & + 6y & - 3 \\
(-) & & & (+) & & (-) & (+) \\
\hline
 & 2x^2 & - 4xy & + 12y^2 & + 5x & - 9y & + 3
\end{array}
$$

नोट किसी संख्या का घटाना उसके योज्य प्रतिलोम को जोड़ने के समान है। इस प्रकार -3 को घटाना, $+3$ को जोड़ने के समान है, इसी प्रकार $6y$ को घटाना, $-6y$ को जोड़ने जैसा है। $-4y^2$ को घटाना $4y^2$ को जोड़ने के समान है और इसी प्रकार अन्य दूसरी पंक्ति के प्रत्येक पद के नीचे तीसरी पंक्ति में लिखे चिह्न से यह जानने में सहायता मिलती है कि कौन सी संक्रिया की जाती हैं।

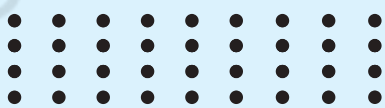
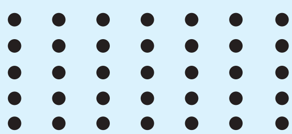
प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :
   (i) $ab - bc,\ bc - ca,\ ca - ab$
   (ii) $a - b + ab,\ b - c + bc,\ c - a + ac$
   (iii) $2p^2q^2 - 3pq + 4,\ 5 + 7pq - 3p^2q^2$
   (iv) $l^2 + m^2,\ m^2 + n^2,\ n^2 + l^2,\ 2lm + 2mn + 2nl$

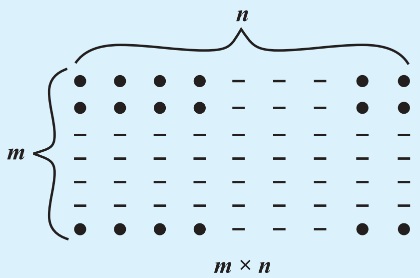
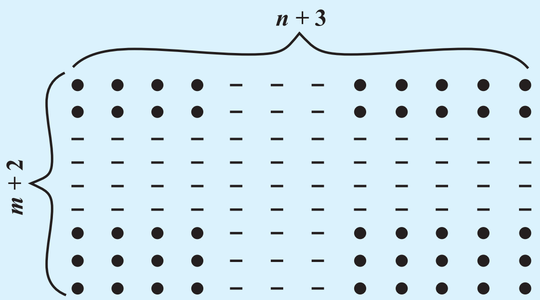
2. (a) $12a - 9ab + 5b - 3$ में से $4a - 7ab + 3b + 12$ को घटाइए।
   (b) $5xy - 2yz - 2zx + 10xyz$ में से $3xy + 5yz - 7zx$ को घटाइए।
   (c) $18 - 3p - 11q + 5pq - 2pq^2 + 5p^2q$ में से $4p^2q - 3pq + 5pq^2 - 8p + 7q - 10$ को घटाइए।

8.2 बीजीय व्यंजकों का गुणन

(i) बिंदुओं के निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए :

बिंदुओं के प्रतिरूप	बिंदुओं की कुल संख्या
	4×9
	5×7

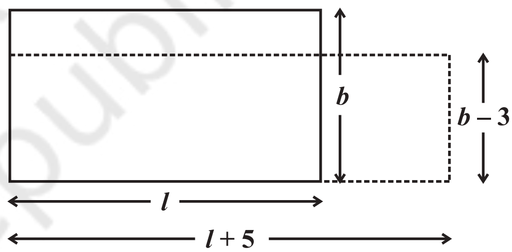
© NCERT not to be republished

	$m \times n$
	$(m + 2) \times (n + 3)$

बिंदुओं की संख्या ज्ञात करने के लिए हमें पंक्तियों की संख्या के व्यंजक को स्तंभों की संख्या के व्यंजक से गुणा करना है।

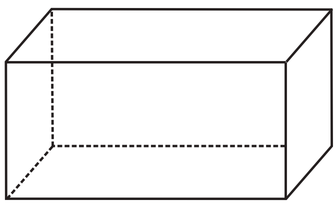
यहाँ पंक्तियों की संख्या 2 बढ़ाई गई है, अर्थात् $m + 2$ और स्तंभों की संख्या 3 बढ़ाई गई है, अर्थात् $n + 3$

(ii) क्या आप ऐसी और परिस्थितियों के बारे में सोच सकते हैं जिनमें दो बीजीय व्यंजकों को गुणा करना पड़ता हो?
अमीना उठकर कहती है। "हम आयत के क्षेत्रफल के बारे में सोच सकते हैं।" आयत का क्षेत्रफल $l \times b$, हैं जिसमें l लंबाई है और b चौड़ाई है। यदि आयत की लंबाई 5 इकाई बढ़ा दी जाए, अर्थात्, $(l + 5)$ कर दी जाए और चौड़ाई 3 इकाई कम कर दी जाए अर्थात् $(b - 3)$ कर दी जाए तो आयत का क्षेत्रफल $(l + 5) \times (b - 3)$ होगा।



आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें $l \times b$ अथवा $(l + 5) \times (b - 3)$ के रूप के बीजीय व्यंजकों को गुणा करना पड़ता है।

(iii) क्या आप आयतन के बारे में सोच सकते हैं? (एक आयताकार बक्से का आयतन उसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के गुणनफल से प्राप्त होता है।)



(iv) सरिता कहती है कि जब हम वस्तुएँ खरीदते हैं तो हमें गुणा करना पड़ता है। उदाहरणार्थ यदि प्रति दर्जन केलों का मूल्य p रुपये है और स्कूल पिकनिक के लिए z दर्जन केलों की आवश्यकता है, तो हमें $(p \times z)$ रुपयों का भुगतान करना पड़ेगा।

मान लीजिए, प्रति दर्जन केलों का मूल्य 2 रुपये कम होता और पिकनिक के लिए 4 दर्जन कम केलों की आवश्यकता होती तो, प्रति दर्जन केलों का मूल्य $(p–2)$ रुपये होता और $(z - 4)$ दर्जन केलों की आवश्यकता होती। इसलिए, हमें $(p - 2) \times (z - 4)$ रुपयों का भुगतान करना पड़ता है।

© NCERT not to be republished

प्रयास कीजिए

क्या आप ऐसी और दो परिस्थितियों के बारे में सोच सकते हैं जहाँ हमें बीजीय व्यंजकों को गुणा करना पड़ सकता है?

[**नोट :** • चाल और समय के बारे में सोचिए।
• साधारण ब्याज, मूलधन और साधारण ब्याज की दर इत्यादि के बारे में सोचिए।]

उपर्युक्त सभी उदाहरणों में हमने दो अथवा अधिक राशियों का गुणन किया है। यदि राशियाँ बीजीय व्यंजकों के रूप में दी हुई हैं और हमें उनका गुणनफल ज्ञात करना है तो इसका अर्थ यह हुआ कि हमें यह जानना चाहिए कि यह गुणनफल कैसे प्राप्त किया जाए। आइए, इसे क्रमानुसार करते हैं। सबसे पहले हम दो एकपदियों का गुणन करते हैं।

8.3 एकपदी को एकपदी से गुणा करना

जिस व्यंजक में केवल एक पद होता है उसे **एकपदी** कहते हैं।

8.3.1 दो एकपदियों को गुणा करना

हम प्रारंभ करते हैं

$4 \times x = x + x + x + x = 4x$ से जो पहले सीख चुके हैं।

इसी प्रकार, $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

अब निम्नलिखित गुणनफलों पर विचार कीजिए :

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$
$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

ध्यान दीजिए एकपदियों के तीनों गुणनफल $3xy$, $15xy$, $-15xy$ भी एकपदी हैं।

कुछ और उपयोगी उदाहरण इस प्रकार हैं :

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$
$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$
$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

नोट कीजिए : $5 \times 4 = 20$

अर्थात्, गुणनफल का गुणांक = प्रथम एकपदी का गुणांक × द्वितीय एकपदी का गुणांक और

$x \times x^2 = x^3$

अर्थात्, गुणनफल का बीजीय गुणनखंड = प्रथम एकपदी का बीजीय गुणनखंड × द्वितीय एकपदी का बीजीय गुणनखंड।

ध्यान दीजिए कि हमने दोनों एकपदियों के बीजीय भागों के विभिन्न चरों की घातों को कैसे इकट्ठा किया है। ऐसा करने के लिए हमने घातों के नियमों का उपयोग किया है।

8.3.2 तीन अथवा अधिक एकपदियों को गुणा करना

निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए :

(i) $2x \times 5y \times 7z = (2x \times 5y) \times 7z = 10xy \times 7z = 70xyz$

(ii) $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4xy \times 5x^2y^2) \times 6x^3y^3 = 20x^3y^3 \times 6x^3y^3 = 120x^3y^3 \times x^3y^3$
$= 120\,(x^3 \times x^3) \times (y^3 \times y^3) = 120x^6 \times y^6 = 120x^6y^6$

यह स्पष्ट है कि हम सर्वप्रथम पहले दो एकपदियों को गुणा करते हैं और इस प्रकार गुणनफल के रूप में प्राप्त एकपदी को तीसरे एकपदी से गुणा करते हैं। बहुसंख्य एकपदियों को गुणा करने के लिए इस विधि का विस्तार किया जा सकता है।

© NCERT not to be republished

प्रयास कीजिए

$4x \times 5y \times 7z$ ज्ञात कीजिए :
सर्वप्रथम $4x \times 5y$ ज्ञात कीजिए और फिर उसे $7z$ से गुणा कीजिए, अथवा सर्वप्रथम $5y \times 7z$ ज्ञात कीजिए और इसे $4x$ से गुणा कीजिए। क्या परिणाम एक जैसा है? आप क्या विचार करते हैं? क्या गुणा करते समय क्रम का महत्त्व है?

हम दूसरे तरीके से भी इस गुणनफल को ज्ञात कर सकते हैं : $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3$
$= (4 \times 5 \times 6) \times (x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3) = 120\ x^6y^6$

उदाहरण 3 : एक आयत के, जिसकी लंबाई और चौड़ाई दी हुई है, क्षेत्रफल की सारणी को पूरा कीजिए :

हल :

लंबाई	चौड़ाई	क्षेत्रफल
$3x$	$5y$	$3x \times 5y = 15xy$
$9y$	$4y^2$	....
$4ab$	$5bc$	....
$2l^2m$	$3lm^2$	....

उदाहरण 4 : निम्नलिखित सारणी में तीन आयताकार बक्सों की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई दी हुई हैं। प्रत्येक का आयतन ज्ञात कीजिए :

	लंबाई	चौड़ाई	ऊँचाई
(i)	$2ax$	$3by$	$5cz$
(ii)	m^2n	n^2p	p^2m
(iii)	$2q$	$4q^2$	$8q^3$

हल : आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई

अत: (i) आयतन $= (2ax) \times (3by) \times (5cz)$
$= 2 \times 3 \times 5 \times (ax) \times (by) \times (cz) = 30abcxyz$

(ii) आयतन $= m^2n \times n^2p \times p^2m$
$= (m^2 \times m) \times (n \times n^2) \times (p \times p^2) = m^3n^3p^3$

(iii) आयतन $= 2q \times 4q^2 \times 8q^3$
$= 2 \times 4 \times 8 \times q \times q^2 \times q^3 = 64q^6$

प्रश्नावली 8.2

1. निम्नलिखित एकपदी युग्मों का गुणनफल ज्ञात कीजिए :
   (i) $4, 7p$ (ii) $-4p, 7p$ (iii) $-4p, 7pq$ (iv) $4p^3, -3p$
   (v) $4p, 0$
2. निम्नलिखित एकपदी युग्मों के रूप में लंबाई एवं चौड़ाई रखने वाले आयतों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :
   (p, q); $(10m, 5n)$; $(20x^2, 5y^2)$; $(4x, 3x^2)$; $(3mn, 4np)$

© NCERT not to be republished

3. गुणनफलों की सारणी को पूरा कीजिए :

प्रथम एकपदी → द्वितीय एकपदी ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	...	...	...	...	...
$-5y$	...	...	$-15x^2y$	...	...	...
$3x^2$	...	...	...	...	...	...
$-4xy$	...	...	...	...	...	...
$7x^2y$	...	...	...	...	...	...
$-9x^2y^2$	...	...	...	...	...	...

4. ऐसे घना आकार बक्सों का आयतन ज्ञात कीजिए जिनकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः निम्नलिखित हैं :

(i) $5a, 3a^2, 7a^4$ (ii) $2p, 4q, 8r$ (iii) $xy, 2x^2y, 2xy^2$ (iv) $a, 2b, 3c$

5. निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) xy, yz, zx (ii) $a, -a^2, a^3$ (iii) $2, 4y, 8y^2, 16y^3$

(iv) $a, 2b, 3c, 6abc$ (v) $m, -mn, mnp$

8.4 एकपदी को बहुपद से गुणा करना

दो पदों वाला व्यंजक **द्विपद** कहलाता है। तीन पदों वाले व्यंजक को **त्रिपद** कहते हैं और इसी प्रकार अन्य। व्यापकतः एक अथवा अधिक पदों वाला व्यंजक जिसके गुणांक शून्येतर हों और जिसके चरों की घात ऋणेतर पूर्णांक हों, **बहुपद** कहलाता है।

8.4.1 एकपदी को द्विपद से गुणा करना

आइए, एकपदी $3x$ को द्विपद $5y + 2$ से गुणा करते हैं, अर्थात्, $3x \times (5y + 2)$ ज्ञात करते हैं। स्मरण कीजिए कि $3x$ और $(5y + 2)$ संख्याओं को निरूपित करते हैं। इसलिए विवरण के नियम का उपयोग करते हुए, $3x \times (5y + 2) = (3x \times 5y) + (3x \times 2) = 15xy + 6x$

हम सामान्यतः अपने परिकलनों में वितरण के नियम का उपयोग करते हैं। उदाहरणार्थ

$7 \times 106 = 7 \times (100 + 6)$

$= 7 \times 100 + 7 \times 6$ (यहाँ हमने वितरण नियम का उपयोग किया है।)

$= 700 + 42 = 742$

$7 \times 38 = 7 \times (40 - 2)$

$= 7 \times 40 - 7 \times 2$ (यहाँ हमने वितरण नियम का उपयोग किया है।)

$= 280 - 14 = 266$

इसी प्रकार, $(-3x) \times (-5y + 2) = (-3x) \times (-5y) + (-3x) \times (2) = 15xy - 6x$

और $5xy \times (y^2 + 3) = (5xy \times y^2) + (5xy \times 3) = 5xy^3 + 15xy.$

© NCERT not to be republished

द्विपद एवं एकपदी के गुणनफल के बारे में आपका क्या विचार है? उदाहरणार्थ $(5y + 2) \times 3x = ?$ हम $7 \times 3 = 3 \times 7$; अथवा व्यापक रूप से $a \times b = b \times a$ के रूप में क्रमविनिमेय नियम का उपयोग कर सकते हैं।

इसी प्रकार $(5y + 2) \times 3x = 3x \times (5y + 2) = 15xy + 6x$ है।

प्रयास कीजिए

गुणनफल ज्ञात कीजिए : (i) $2x\,(3x + 5xy)$ (ii) $a^2\,(2ab - 5c)$

8.3.2 एकपदी को त्रिपद से गुणा करना

$3p \times (4p^2 + 5p + 7)$ लीजिए। पहले की तरह हम वितरण नियम का उपयोग कर सकते हैं।

$$3p \times (4p^2 + 5p + 7) = (3p \times 4p^2) + (3p \times 5p) + (3p \times 7)$$
$$= 12p^3 + 15p^2 + 21p$$

त्रिपद के प्रत्येक पद को एकपदी से गुणा कीजिए और गुणनफल को जोड़ दीजिए।

> विचार कीजिए वितरण नियम के उपयोग से हम एक पद का एक पद के साथ गुणन करने में सक्षम हैं।

प्रयास कीजिए

$(4p^2 + 5p + 7) \times 3p$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 5 : व्यंजकों को सरल कीजिए और निर्देशानुसार मान ज्ञात कीजिए :

(i) $x\,(x - 3) + 2$, $x = 1$ के लिए (ii) $3y\,(2y - 7) - 3\,(y - 4) - 63$, $y = -2$ के लिए

हल :

(i) $x\,(x - 3) + 2 = x^2 - 3x + 2$

$x = 1$ के लिए, $x^2 - 3x + 2 = (1)^2 - 3\,(1) + 2$
$= 1 - 3 + 2 = 3 - 3 = 0$

(ii) $3y(2y - 7) - 3\,(y - 4) - 63 = 6y^2 - 21y - 3y + 12 - 63$
$= 6y^2 - 24y - 51$

$y = -2$ के लिए, $6y^2 - 24y - 51 = 6\,(-2)^2 - 24(-2) - 51$
$= 6 \times 4 + 24 \times 2 - 51$
$= 24 + 48 - 51 = 72 - 51 = 21$

उदाहरण 6 : जोड़िए :

(i) $5m\,(3 - m)$ एवं $6m^2 - 13m$ (ii) $4y\,(3y^2 + 5y - 7)$ एवं $2\,(y^3 - 4y^2 + 5)$

हल :

(i) प्रथम व्यंजक $5m\,(3 - m) = (5m \times 3) - (5m \times m) = 15m - 5m^2$

अब द्वितीय व्यंजक जोड़ने पर $15m - 5m^2 + 6m^2 - 13m = m^2 + 2m$

(ii) प्रथम व्यंजक $= 4y\,(3y^2 + 5y - 7) = (4y \times 3y^2) + (4y \times 5y) + (4y \times (-7))$
$= 12y^3 + 20y^2 - 28y$

© NCERT not to be republished

द्वितीय व्यंजक $= 2\,(y^3 - 4y^2 + 5) = 2y^3 + 2 \times (-4y^2) + 2 \times 5$

$= 2y^3 - 8y^2 + 10$

दोनों व्यंजकों को जोड़ने पर

$$\begin{array}{rrrrr} & 12y^3 & + & 20y^2 - 28y & \\ + & 2y^3 & - & 8y^2 & + 10 \\ \hline & 14y^3 & + & 12y^2 - 28y & + 10 \end{array}$$

उदाहरण 7 : $2pq\,(p + q)$ में से $3pq\,(p - q)$ को घटाइए।

हल : हम प्राप्त करते हैं $3pq\,(p - q) = 3p^2q - 3pq^2$ और

$2pq\,(p + q) = 2p^2q + 2pq^2$

घटाने पर

$$\begin{array}{rrcr} & 2p^2q & + & 2pq^2 \\ & 3p^2q & - & 3pq^2 \\ - & & + & \\ \hline & -p^2q & + & 5pq^2 \end{array}$$

प्रश्नावली 8.3

1. निम्नलिखित युग्मों में प्रत्येक के व्यंजकों का गुणन कीजिए :

(i) $4p,\ q + r$ (ii) $ab,\ a - b$ (iii) $a + b,\ 7a^2b^2$ (iv) $a^2 - 9,\ 4a$

(v) $pq + qr + rp,\ 0$

2. सारणी पूरा कीजिए :

	प्रथम व्यंजक	द्वितीय व्यंजक	गुणनफल
(i)	a	$b + c + d$	___
(ii)	$x + y - 5$	$5xy$	___
(iii)	p	$6p^2 - 7p + 5$	___
(iv)	$4p^2q^2$	$p^2 - q^2$	___
(v)	$a + b + c$	abc	___

3. गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $(a^2) \times (2a^{22}) \times (4a^{26})$ (ii) $\left(\frac{2}{3}xy\right) \times \left(\frac{-9}{10}x^2y^2\right)$

(iii) $\left(-\frac{10}{3}pq^3\right) \times \left(\frac{6}{5}p^3q\right)$ (iv) $x \times x^2 \times x^3 \times x^4$

4. (a) $3x\,(4x - 5) + 3$ को सरल कीजिए और (i) $x = 3$ एवं (ii) $x = \frac{1}{2}$ के लिए इसका मान ज्ञात कीजिए।

(b) $a\,(a^2 + a + 1) + 5$ को सरल कीजिए और (i) $a = 0$, (ii) $a = 1$ एवं (iii) $a = -1$ के लिए इसका मान ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

5. (a) $p\,(p-q), q\,(q-r)$ एवं $r\,(r-p)$ को जोड़िए।

(b) $2x\,(z-x-y)$ एवं $2y\,(z-y-x)$ को जोड़िए।

(c) $4l\,(10n-3m+2\,l)$ में से $3l\,(l-4m+5n)$ को घटाइए।

(d) $4c\,(-a+b+c)$ में से $3a\,(a+b+c)-2\,b\,(a-b+c)$ को घटाइए।

8.5 बहुपद को बहुपद से गुणा करना

8.5.1 द्विपद को द्विपद से गुणा करना

आइए, एक द्विपद $(2a+3b)$ को दूसरे द्विपद $(3a+4b)$ से गुणा करते हैं। जैसा कि हमने पहले किया है, वैसे ही गुणन के वितरण नियम का अनुसरण करते हुए हम इसे भी क्रम से करते हैं;

$$(3a+4b)\times(2a+3b) = 3a\times(2a+3b)+4b\times(2a+3b)$$

$$= (3a\times 2a)+(3a\times 3b)+(4b\times 2a)+(4b\times 3b)$$

$$= 6a^2+9ab+8ba+12b^2$$

$$= 6a^2+17ab+12b^2 \qquad (\text{क्योंकि } ba = ab \text{ है।})$$

> ध्यान दीजिए एक द्विपद का प्रत्येक पद दूसरे द्विपद के प्रत्येक पद से गुणा होता है।

जब हम एक द्विपद का एक द्विपद के साथ गुणन करते हैं, तो हम आशा करते हैं कि $2\times 2 = 4$ पद उपस्थित होने चाहिए परंतु इनमें से दो पद समान हैं जिनको एक साथ इकट्ठा कर दिया है और इस प्रकार हमें 3 पद प्राप्त होते हैं।

बहुपद को बहुपद से गुणा करते समय हमें समान पदों को ढूँढ़ लेना चाहिए और उन्हें मिला लेना चाहिए।

उदाहरण 8 : गुणा कीजिए :

(i) $(x-4)$ एवं $(2x+3)$ को (ii) $(x-y)$ एवं $(3x+5y)$ को

हल :

(i) $(x-4)\times(2x+3) = x\times(2x+3)-4\times(2x+3)$

(समान पदों को जोड़ने पर)

$= (x\times 2x)+(x\times 3)-(4\times 2x)-(4\times 3) = 2x^2+3x-8x-12$

$= 2x^2-5x-12$ (समान पदों को जोड़ने पर)

(ii) $(x-y)\times(3x+5y) = x\times(3x+5y)-y\times(3x+5y)$

$= (x\times 3x)+(x\times 5y)-(y\times 3x)-(y\times 5y)$

$= 3x^2+5xy-3yx-5y^2 = 3x^2+2xy-5y^2$

उदाहरण 9 : गुणा कीजिए :

(i) $(a+7)$ और $(b-5)$ को (ii) (a^2+2b^2) और $(5a-3b)$ को

हल :

(i) $(a+7)\times(b-5) = a\times(b-5)+7\times(b-5)$

$= ab-5a+7b-35$

नोट कीजिए कि इस गुणन में कोई भी समान पद नहीं हैं।

(ii) $(a^2+2b^2)\times(5a-3b) = a^2\,(5a-3b)+2b^2\times(5a-3b)$

$= 5a^3-3a^2b+10ab^2-6b^3$

© NCERT not to be republished

8.5.2 द्विपद को त्रिपद से गुणा करना

इस गुणन में हमें त्रिपद के प्रत्येक पद को द्विपद के प्रत्येक पद से गुणा करना पड़ेगा। इस प्रकार हमें $3 \times 2 = 6$ पद प्राप्त होंगे, यदि एक पद को एक पद से गुणा करने पर समान पद बनते हैं, तो प्राप्त पदों की संख्या घटकर पाँच या उससे भी कम हो सकती है।

$$\underbrace{(a+7)}_{\text{द्विपद}} \times \underbrace{(a^2+3a+5)}_{\text{त्रिपद}} = a \times (a^2+3a+5) + 7 \times (a^2+3a+5) \quad \text{वितरण नियम के उपयोग से}$$

$$= a^3 + 3a^2 + 5a + 7a^2 + 21a + 35$$
$$= a^3 + (3a^2 + 7a^2) + (5a + 21a) + 35$$
$$= a^3 + 10a^2 + 26a + 35$$

(अंतिम परिणाम में केवल 4 पद ही क्यों हैं?)

उदाहरण 10 : सरल कीजिए : $(a + b)(2a - 3b + c) - (2a - 3b)c$

हल : हम प्राप्त करते हैं :

$$(a + b)(2a - 3b + c) = a(2a - 3b + c) + b(2a - 3b + c)$$
$$= 2a^2 - 3ab + ac + 2ab - 3b^2 + bc$$
$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac$$

(ध्यान दीजिए $-3ab$ एवं $2ab$ समान पद हैं।)

और $\qquad (2a - 3b)c = 2ac - 3bc$ है।

इसलिए, $(a + b)(2a - 3b + c) - (2a - 3b)c = 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - (2ac - 3bc)$
$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - 2ac + 3bc$$
$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + (bc + 3bc) + (ac - 2ac)$$
$$= 2a^2 - 3b^2 - ab + 4bc - ac$$

प्रश्नावली 8.4

1. द्विपदों को गुणा कीजिए :
   - (i) $(2x + 5)$ और $(4x - 3)$
   - (ii) $(y - 8)$ और $(3y - 4)$
   - (iii) $(2.5l - 0.5m)$ और $(2.5l + 0.5m)$
   - (iv) $(a + 3b)$ और $(x + 5)$
   - (v) $(2pq + 3q^2)$ और $(3pq - 2q^2)$
   - (vi) $\left(\frac{3}{4}a^2 + 3b^2\right)$ और $4\left(a^2 \quad \frac{2}{3}b^2\right)$
2. गुणनफल ज्ञात कीजिए :
   - (i) $(5 - 2x)(3 + x)$
   - (ii) $(x + 7y)(7x - y)$
   - (iii) $(a^2 + b)(a + b^2)$
   - (iv) $(p^2 - q^2)(2p + q)$
3. सरल कीजिए :
   - (i) $(x^2 - 5)(x + 5) + 25$
   - (ii) $(a^2 + 5)(b^3 + 3) + 5$
   - (iii) $(t + s^2)(t^2 - s)$

© NCERT not to be republished

(iv) $(a + b)(c - d) + (a - b)(c + d) + 2(ac + bd)$

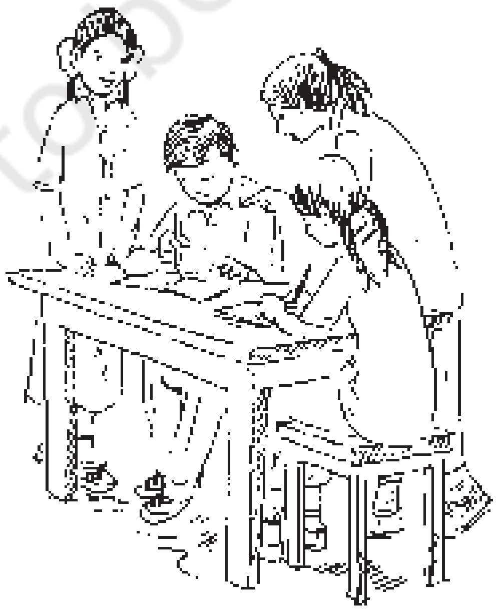
(v) $(x + y)(2x + y) + (x + 2y)(x - y)$ (vi) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(vii) $(1.5x - 4y)(1.5x + 4y + 3) - 4.5x + 12y$

(viii) $(a + b + c)(a + b - c)$

हमने क्या चर्चा की?

1. **चरों** एवं **अचरों** की सहायता से व्यंजक बनते हैं।
2. **व्यंजक** बनाने के लिए पदों को जोड़ा जाता है। स्वयं पदों का निर्माण **गुणनखंडों** के गुणनफल के रूप में होता है।
3. व्यंजक जिनमें एक, दो तथा तीन पद होते हैं क्रमशः **एकपदी**, **द्विपदी** और **त्रिपदी** कहलाते हैं। सामान्यतः एक अथवा अधिक पदों वाला व्यंजक जिसमें पदों के गुणांक शून्येतर पूर्णांक हैं और चरों की घात ऋणेतर है, **बहुपद** कहलाता है।
4. समान चरों से **समान पद** बनते हैं, और इन चरों की घात भी समान होती है। समान पदों के गुणांक समान होने आवश्यक नहीं है।
5. बहुपदों को जोड़ने (अथवा घटाने) के लिए सबसे पहले समान पदों को ढूँढ़िए और उन्हें जोड़ (अथवा घटा) दीजिए, उसके पश्चात् असमान पदों को उपयोग में लीजिए।
6. बहुत सी परिस्थितियों में हमें बीजीय व्यंजकों को गुणा करने की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, जिसकी भुजाएँ बीजीय व्यंजकों के रूप में दी हुई हैं।
7. एकपदी को एकपदी से गुणा करने पर हमेशा एकपदी प्राप्त होता है।
8. बहुपद को एकपदी से गुणा करने के लिए बहुपद का प्रत्येक पद एकपदी से गुणा किया जाता है।
9. बहुपद का द्विपद (अथवा त्रिपद) से गुणन करने के लिए हम एक पद को एक-एक पद से गुणा करते हैं, अर्थात् बहुपद का प्रत्येक पद द्विपद (अथवा त्रिपद) के प्रत्येक पद से गुणा किया जाता है। ध्यान दीजिए इस प्रकार के गुणन में, हमें गुणनफल में समान पद प्राप्त हो सकते हैं और उन्हें मिलाना पड़ सकता है।



© NCERT not to be republished

नोट

© NCERT
not to be republished

अध्याय 9

क्षेत्रमिति

0853CH11

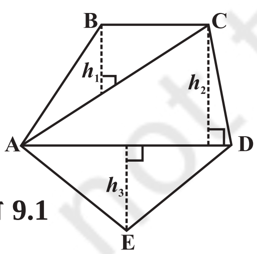
9.1 भूमिका

हम अध्ययन कर चुके हैं कि किसी बंद समतल आकृति की सीमा के चारों ओर की दूरी उसका परिमाप कहलाता है और उस आकृति द्वारा घिरे हुए क्षेत्र को उसका क्षेत्रफल कहते हैं। हम त्रिभुज, आयत, वृत्त इत्यादि विभिन्न समतल आकृतियों का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात करना सीख चुके हैं तथा आयताकार आकार के किनारों अथवा पगडंडियों का क्षेत्रफल भी सीख चुके हैं।

इस अध्याय में हम चतुर्भुज जैसी दूसरी बंद आकृतियों के क्षेत्रफल एवं परिमाप से संबंधित समस्याएँ हल करने का प्रयत्न करेंगे। हम घन, घनाभ और बेलन जैसे ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन का भी अध्ययन करेंगे।

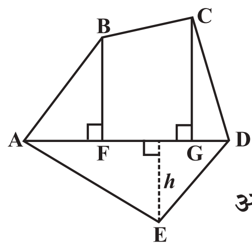
9.2 बहुभुज का क्षेत्रफल

हम एक चतुर्भुज को त्रिभुजों में खंडित करते हैं और इसका क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। इसी प्रकार की विधि बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उपयोग की जा सकती है। एक पंचभुज के लिए निम्नलिखित पर विचार कीजिए (आकृति 9.1, 9.2)



आकृति 9.1

विकर्ण AC तथा AD की रचना करते हुए पंचभुज ABCDE को तीन भागों में बाँटा गया है। इसलिए ABCDE का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔADC का क्षेत्रफल + ΔAED का क्षेत्रफल।

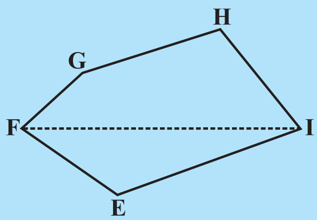


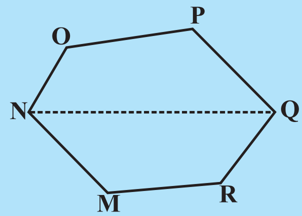
आकृति 9.2

एक विकर्ण AD और इस पर दो लंब BF एवं CG की रचना करते हुए पंचभुज ABCDE को चार भागों में बाँटा गया है। इसलिए ABCDE का क्षेत्रफल = समकोण त्रिभुज AFB का क्षेत्रफल + समलंब BFGC का क्षेत्रफल + समकोण त्रिभुज CGD का क्षेत्रफल + Δ AED का क्षेत्रफल (समलंब BFGC की समांतर भुजाओं को पहचानिए)

प्रयास कीजिए

(i) निम्नलिखित बहुभुजों (आकृति 9.3) का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इन्हें विभिन्न भागों (त्रिभुजों एवं समलंबों) में विभाजित कीजिए।





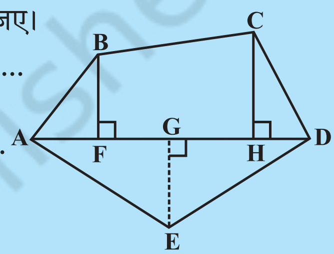
आकृति 9.3

बहुभुज EFGHI का एक विकर्ण FI है।   बहुभुज MNOPQR का एक विकर्ण NQ है।

(ii) बहुभुज ABCDE को विभिन्न भागों में बाँटा गया है जैसा कि आकृति 9.4 में दर्शाया गया है। यदि AD = 8 cm, AH = 6 cm, AG = 4 cm, AF = 3 cm और लंब BF = 2 cm, CH = 3 cm, EG = 2.5 cm तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

बहुभुज ABCDE का क्षेत्रफल = Δ AFB का क्षेत्रफल + ...

Δ AFB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AF \times BF = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = ...$



आकृति 9.4

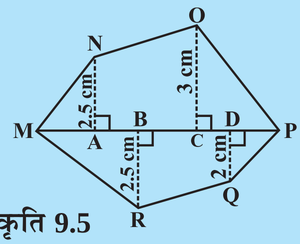
समलंब FBCH का क्षेत्रफल $= FH \times \frac{(BF+CH)}{2}$

$= 3 \times \frac{(2+3)}{2}$ [FH = AH – AF]

ΔCHD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times HD \times CH = ...$; ΔADE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AD \times GE = ...$

इसलिए बहुभुज ABCDE का क्षेत्रफल = ...

(iii) यदि MP = 9 cm, MD = 7 cm, MC = 6 cm, MB = 4 cm, MA = 2 cm तो बहुभुज MNOPQR (आकृति 9.5) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। NA, OC, QD एवं RB विकर्ण MP पर खींचे गए लंब हैं।



आकृति 9.5

उदाहरण 1 : समलंब के आकार के एक खेत का क्षेत्रफल 480 m^2 हैं; दो समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 15 m है और उनमें से एक समांतर भुजा की लंबाई 20 m है। दूसरी समांतर भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : समलंब की समांतर भुजाओं में से एक की लंबाई a = 20 m, मान लीजिए दूसरी समांतर भुजा b है, ऊँचाई h = 15 m

समलंब का दिया हुआ क्षेत्रफल = 480 m^2

समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} h (a + b)$

© NCERT not to be republished

$$\text{इसलिए} \quad 480 = \frac{1}{2} \times 15 \times (20 + b) \quad \text{अथवा} \quad \frac{480 \times 2}{15} = 20 + b$$

$$\text{अथवा} \quad 64 = 20 + b \qquad \text{अथवा} \quad b = 44 \text{ m}$$

अतः समलंब की दूसरी समांतर भुजा 44 m है।

उदाहरण 2 : एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 240 cm^2 है और विकर्णों में से एक की लंबाई 16cm है। दूसरा विकर्ण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए एक विकर्ण की लंबाई $d_1 = 16$ cm

और दूसरे विकर्ण की लंबाई = d_2

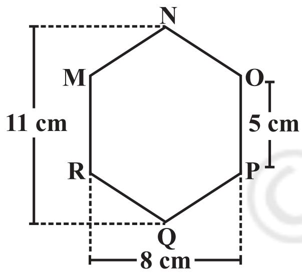
समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\, d_1 \,.\, d_2 = 240$

इसलिए, $\frac{1}{2} 16 \cdot d_2 = 240$

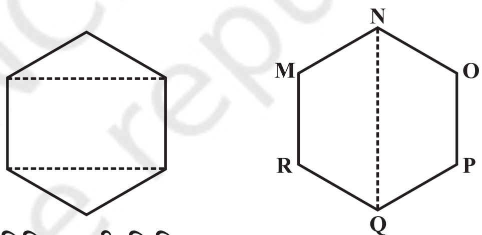
अतः, $d_2 = 30$ cm

इस प्रकार दूसरे विकर्ण की लंबाई 30 cm है।

उदाहरण 3: MNOPQR (आकृति 9.6) एक षड्भुज है जिसकी प्रत्येक भुजा 5 cm है। अमन और रिधिमा ने इसे दो विभिन्न प्रकार से विभाजित किया (आकृति 9.7)। दोनों प्रकार का उपयोग करते हुए इस षड्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.6



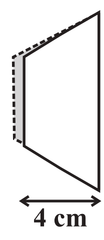
रिधिमा की विधि

अमन की विधि

आकृति 9.7

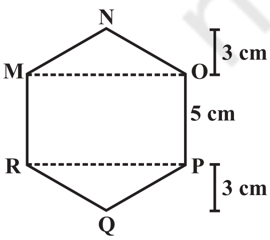
हल : अमन की विधि :

क्योंकि यह एक षड्भुज है इसलिए NQ इस षड्भुज को दो सर्वांगसम समलंबों में विभाजित करता है। आप इसे कागज़ मोड़ने की विधि से सत्यापित कर सकते हैं। (आकृति 9.8)



आकृति 9.8

अब समलंब MNQR का क्षेत्रफल $= 4 \times \frac{(11+5)}{2} = 2 \times 16 = 32 \text{ cm}^2$.



आकृति 9.9

इसलिए षड्भुज MNOPQR का क्षेत्रफल $= 2 \times 32 = 64 \text{ cm}^2$.

रिधिमा की विधि :

Δ MNO और Δ RPQ सर्वांगसम त्रिभुज हैं जिनमें से प्रत्येक का शीर्षलंब 3 cm है (आकृति 9.9) (1)

आप इन त्रिभुजों को काटकर और एक-दूसरे के ऊपर रखकर इसका सत्यापन कर सकते हैं।

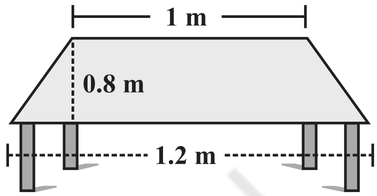
© NCERT not to be republished

Δ MNO का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12\ cm^2 = \Delta$ RPQ का क्षेत्रफल आयत MOPR का क्षेत्रफल

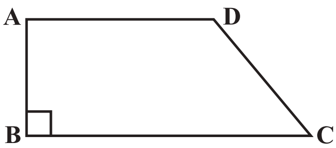
$= 8 \times 5 = 40\ cm^2$.

अब, षड्भुज MNOPQR का क्षेत्रफल $= 40 + 12 + 12 = 64\ cm^2$.

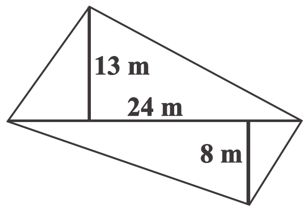
प्रश्नावली 9.1



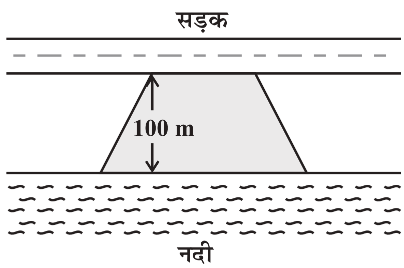
1. एक मेज़ के ऊपरी पृष्ठ (सतह) का आकार समलंब जैसा है। यदि इसकी समांतर भुजाएँ 1 m और 1.2 m हैं तथा इन समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 0.8 m है, तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक समलंब का क्षेत्रफल $34\ cm^2$ है और इसकी ऊँचाई 4 cm है। समांतर भुजाओं में से एक की 10 cm लंबाई है। दूसरी समांतर भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।



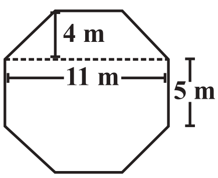
3. एक समलंब के आकार के खेत ABCD की बाड़ की लंबाई 120 m है। यदि BC = 48 m, CD = 17 m और AD = 40 m है, तो इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। भुजा AB समांतर भुजाओं AD तथा BC पर लंब है।



4. एक चतुर्भुज आकार के खेत का विकर्ण 24 m है और शेष सम्मुख शीर्षों से इस विकर्ण पर खींचे गए लंब 8 m एवं 13 m हैं। खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. किसी समचतुर्भुज के विकर्ण 7.5 cm एवं 12 cm हैं। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा 6 cm और शीर्षलंब 4 cm है। यदि एक विकर्ण की लंबाई 8 cm है तो दूसरे विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।
7. किसी भवन के फर्श में समचतुर्भुज के आकार की 3000 टाइलें हैं और इनमें से प्रत्येक के विकर्ण 45 cm एवं 30 cm लंबाई के हैं। 4 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से इस फर्श को पॉलिश करने का व्यय ज्ञात कीजिए।

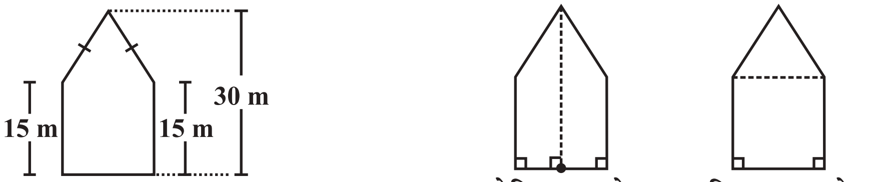


8. मोहन एक समलंब के आकार का खेत खरीदना चाहता है। इस खेत की नदी के साथ वाली भुजा सड़क के साथ वाली भुजा के समांतर हैं और लंबाई में दुगुनी है। यदि इस खेत का क्षेत्रफल $10,500\ m^2$ हैं और दो समांतर भुजाओं के बीच की लंबवत् दूरी 100 m है, तो नदी के साथ वाली भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

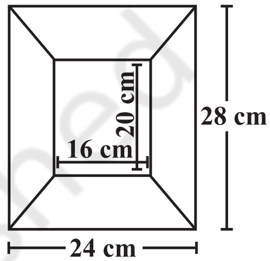


9. एक ऊपर उठे हुए चबूतरे का ऊपरी पृष्ठ अष्टभुज के आकार का है। जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। अष्टभुजी पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. एक पंचभुज आकार का बगीचा है जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए ज्योति और कविता ने इसे दो विभिन्न तरीकों से विभाजित किया। दोनों तरीकों का उपयोग करते हुए इस बगीचे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या आप इसका क्षेत्रफल ज्ञात करने की कोई और विधि बता सकते हैं?



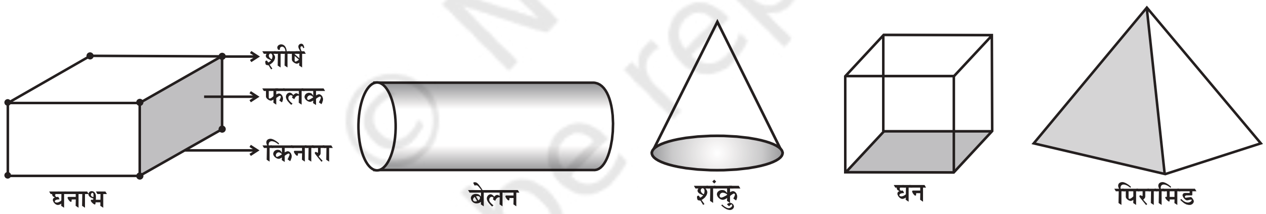
11. संलग्न पिक्चर फ्रेम के आरेख की बाहरी एवं अंत: विमाएँ क्रमश: 24 cm × 28 cm एवं 16 cm × 20 cm हैं। यदि फ्रेम के प्रत्येक खंड की चौड़ाई समान है, तो प्रत्येक खंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



9.3 ठोस आकार

आप अपनी पिछली कक्षाओं में अध्ययन कर चुके हैं कि द्विविमीय आकृतियों को त्रिविमीय आकारों के फलकों के रूप में पहचाना जा सकता है। अभी तक हमने जिन ठोसों का अध्ययन किया है उन पर ध्यान दीजिए (आकृति 9.10)।

ध्यान दीजिए कि कुछ आकारों में दो या दो से अधिक समरूप (सर्वांगसम) फलक हैं। उनको नाम दीजिए। कौन से ठोसों में सभी फलक सर्वांगसम हैं?



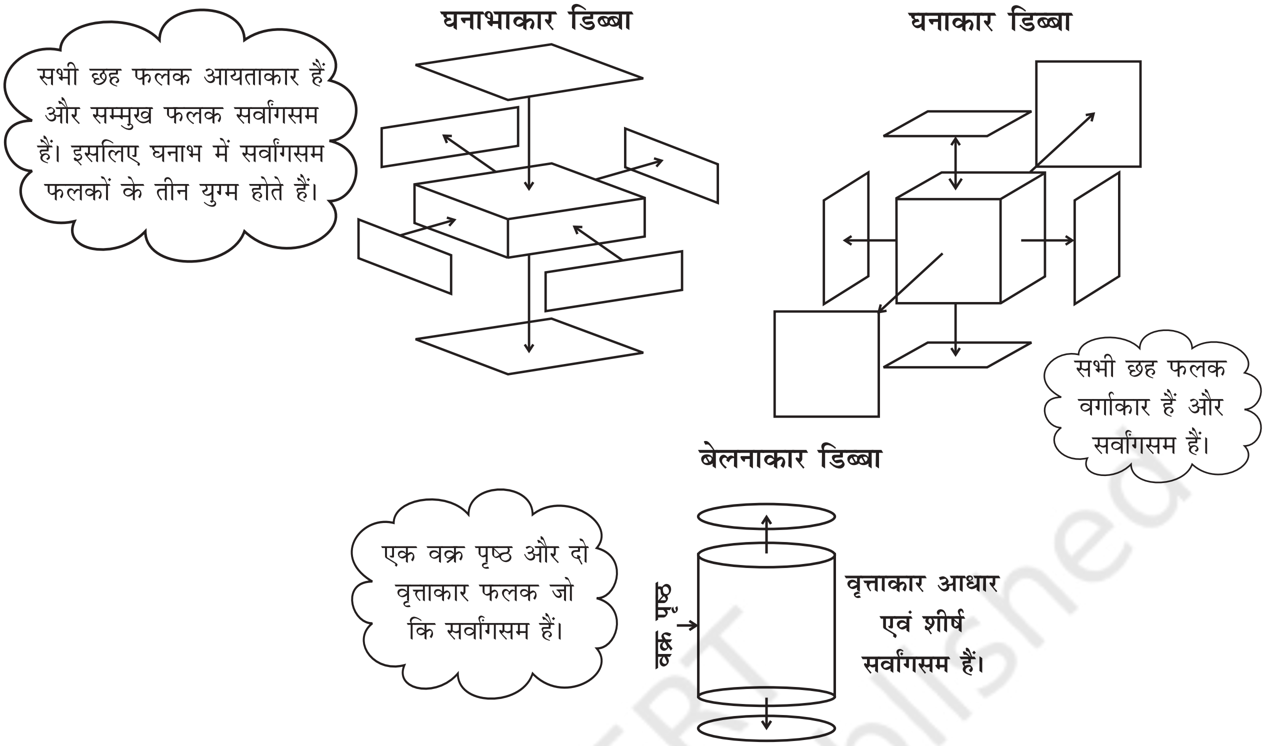
आकृति 9.10

इन्हें कीजिए

साबुन, खिलौने, मंजन, अल्पाहार इत्यादि प्राय: घनाभकार, घनाकार अथवा बेलनाकार डिब्बों में बंद आते हैं। ऐसे डिब्बों को एकत्रित कीजिए (आकृति 9.11)।

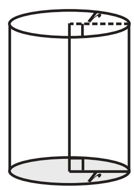
आकृति 9.11

© NCERT not to be republished



अब एक समय में एक प्रकार के डिब्बे को लीजिए। इसके सभी फलकों को काटिए। प्रत्येक फलक के आकार को देखिए और समान फलकों को एक-दूसरे के ऊपर रखकर डिब्बे में फलकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

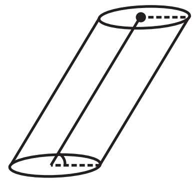
अपने प्रेक्षणों को लिखिए।



आकृति 9.12

(यह एक लंब वृत्तीय बेलन है।)

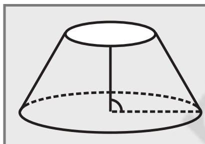
क्या आपने निम्नलिखित पर ध्यान दिया– बेलन के, सर्वांगसम वृत्ताकार फलक एक-दूसरे के समांतर हैं (आकृति 9.12)। ध्यान दीजिए कि वृत्ताकार फलकों के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड आधार पर लंब है। ऐसे बेलन लंबवृत्तीय बेलन कहलाते हैं। हम केवल इस प्रकार के बेलनों का ही अध्ययन करेंगे, यद्यपि दूसरे प्रकार के बेलन भी होते हैं (आकृति 9.13)।



आकृति 9.13

(यह एक लंब वृत्तीय बेलन नहीं है।)

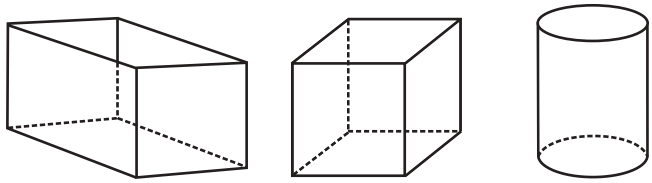
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए



संलग्न आकृति में दर्शाए गए ठोस को बेलन कहना क्यों गलत है?

9.4 घन, घनाभ और बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

इमरान, मोनिका और जसपाल क्रमशः समान ऊँचाई वाले घनाभाकार, घनाकार और बेलनाकार डिब्बों को पेंट कर रहे हैं (आकृति 9.14)।



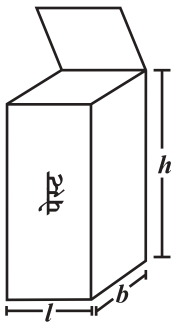
आकृति 9.14

वे यह ज्ञात करने का प्रयास करते हैं कि किसने अधिक क्षेत्रफल को पेंट किया है। हरी उन्हें सुझाव देता है कि प्रत्येक डिब्बे का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करना उनकी मदद करेगा।

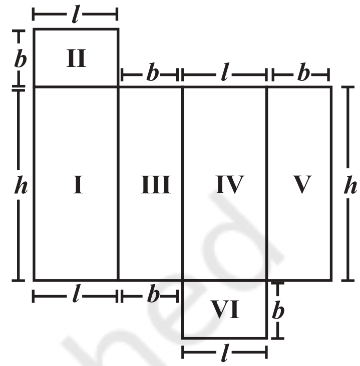
कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और इनका योग कीजिए। किसी ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल उसके फलकों के क्षेत्रफलों का योग होता है। और अधिक स्पष्ट करने के लिए हम प्रत्येक आकार को एक-एक करके लेते हैं।

9.4.1 घनाभ

मान लीजिए, आप एक घनाभकार डिब्बे (आकृति 9.15) को काटकर और खोलकर समतल फैला देते हैं (आकृति 9.16), हमें एक जाल (नेट) प्राप्त होता है।



आकृति 9.15



आकृति 9.16

प्रत्येक भुजा की विमा लिखिए। आप जानते हैं कि घनाभ में सर्वांगसम फलकों के तीन युग्म होते हैं। प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए आप कौन-सा व्यंजक (सूत्र) उपयोग कर सकते हैं?

डिब्बे के सभी फलकों का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। हम देखते हैं कि घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = क्षेत्रफल I + क्षेत्रफल II + क्षेत्रफल III + क्षेत्रफल IV + क्षेत्रफल V + क्षेत्रफल VI

$= h \times l + b \times l + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$

इसलिए कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(h \times l + b \times h + b \times l) = 2(lb + bh + hl)$

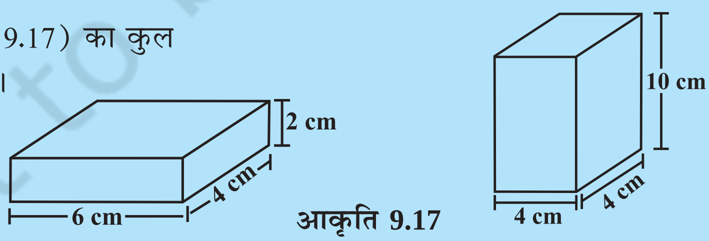
जिसमें h, l और b क्रमशः घनाभ की ऊँचाई, लंबाई और चौड़ाई हैं।

यदि उपर्युक्त दर्शाए गए डिब्बे की ऊँचाई, लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 20 cm, 15 cm और 10 cm हैं, तो कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(20 \times 15 + 20 \times 10 + 10 \times 15)$

$= 2\,(300 + 200 + 150) = 1300\ m^2$

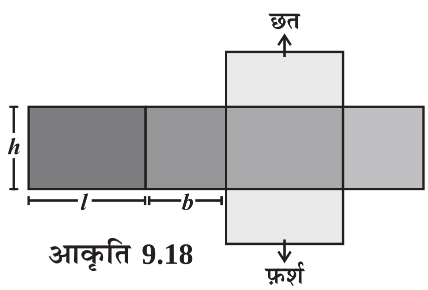
प्रयास कीजिए

निम्नलिखित घनाभों (आकृति 9.17) का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.17

- घनाभ की दीवारें (तल एवं शीर्ष के अतिरिक्त फलक) पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल प्रदान करती हैं। उदाहरणतः जिस घनाभाकार कमरे में आप बैठे हुए हैं उस कमरे की चारदीवारों का कुल क्षेत्रफल कमरे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल है (आकृति 9.18)। अतः घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $2(h \times l + b \times h)$ अथवा $2h\,(l + b)$ द्वारा प्राप्त किया जाता है।



आकृति 9.18

© NCERT not to be republished

इन्हें कीजिए

(i) एक घनाभाकार डस्टर (जिसे आपके अध्यापक कक्षा में उपयोग करते हैं) के पार्श्व पृष्ठ को भूरे रंग के कागज़ की पट्टी से इस प्रकार ढकिए कि यह डस्टर के पृष्ठ के चारों ओर बिल्कुल ठीक बैठे। कागज़ को हटाइए। कागज़ का क्षेत्रफल मापिए। क्या यह डस्टर का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल है?

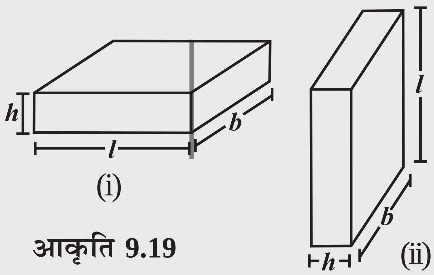
(ii) अपनी कक्षा के कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई मापिए और निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

(a) खिड़कियों और दरवाजों के क्षेत्रफल को छोड़कर कमरे का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल।

(b) इस कमरे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल।

(c) सफेदी किए जाने वाला, कमरे का कुल क्षेत्रफल।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए



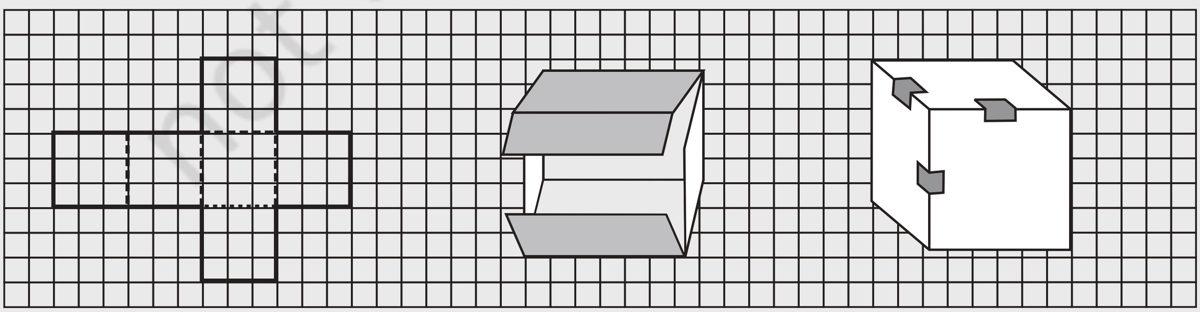
आकृति 9.19

1. क्या हम कह सकते हैं कि घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × आधार का क्षेत्रफल ?
2. यदि हम किसी घनाभ (**आकृति** 9.19(i)) की ऊँचाई और आधार की लंबाई को परस्पर बदलकर एक दूसरा घनाभ (आकृति 9.19(ii)), प्राप्त कर लें तो क्या पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल बदल जाएगा?

9.4.2 घन

इन्हें कीजिए

एक वर्गांकित कागज़ पर दर्शाए गए पैटर्न को खींचिए और उसे काटिए (आकृति 9.20(i))। आप जानते हैं कि यह पैटर्न घन का जाल (नेट) है। इसे रेखाओं के अनुदिश मोड़िए (आकृति 9.20(ii)) और घन बनाने के लिए किनारों पर टेप लगाइए (आकृति 9.20(iii))



(i) (ii) (iii)

आकृति 9.20

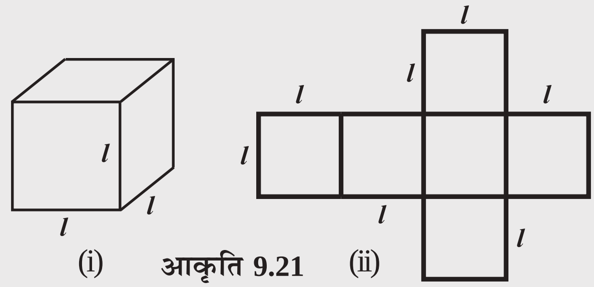
© NCERT not to be republished

(a) इस घन की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्या है? ध्यान दीजिए घन के सभी फलक वर्गाकार हैं। इसलिए घन की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान होती है (आकृति 9.21(i))।

(b) प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल लिखिए। क्या सभी फलकों के क्षेत्रफल समान हैं?

(c) इस घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल लिखिए।

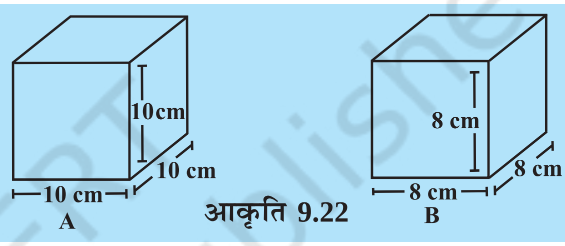
(d) यदि घन की प्रत्येक भुजा l है, तो प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल क्या होगा (आकृति 9.21(ii))। क्या हम कह सकते हैं कि l भुजा वाले घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $6l^2$ है?



(i) **आकृति 9.21** (ii)

प्रयास कीजिए

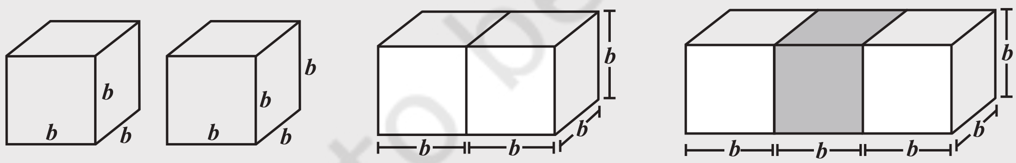
घन A का पृष्ठीय क्षेत्रफल और घन B का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 9.22)।



आकृति 9.22

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

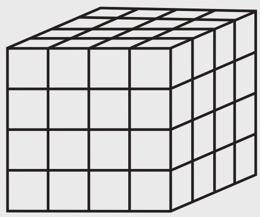
(i) b भुजा वाले दो घनों को मिलाकर एक घनाभ बनाया गया है (आकृति 9.23)। इस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है? क्या यह $12b^2$ है? क्या ऐसे तीन घनों को मिलाकर बनाए गए घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $18b^2$ है? क्यों?



आकृति 9.23

(ii) न्यूनतम पृष्ठीय क्षेत्रफल का घनाभ निर्मित करने के लिए समान भुजा वाले 12 घनों को किस प्रकार व्यवस्थित करेंगे?

(iii) किसी घन के पृष्ठीय क्षेत्रफल पर पेंट करने के पश्चात् उस घन को समान विमाओं वाले 64 घनों में काटा जाता है (आकृति 9.24)। इनमें से कितने घनों का कोई भी फलक पेंट नहीं हुआ है? कितने घनों का 1 फलक पेंट हुआ है? कितने घनों के 2 फलक पेंट हुए हैं? कितने घनों के तीन फलक पेंट हुए हैं?



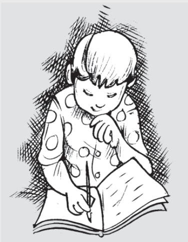
आकृति 9.24

© NCERT not to be republished

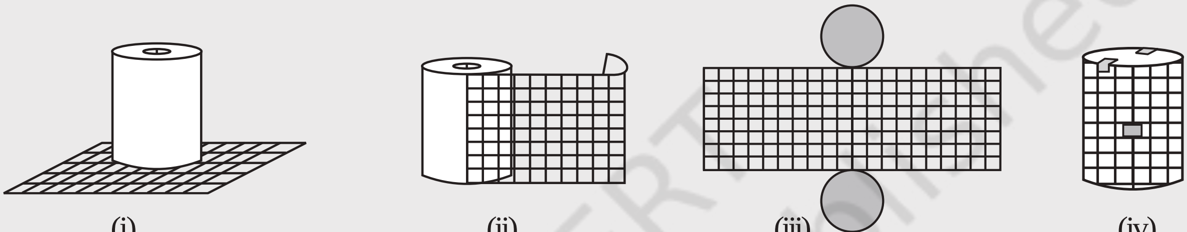
9.4.3 बेलन

जितने भी बेलन हम देखते हैं उनमें से अधिकतर लंब वृत्तीय बेलन है। उदाहरणत: एक टिन, एक गोल खंभा, ट्यूबलाइट, पानी के पाइप इत्यादि :

इन्हें कीजिए



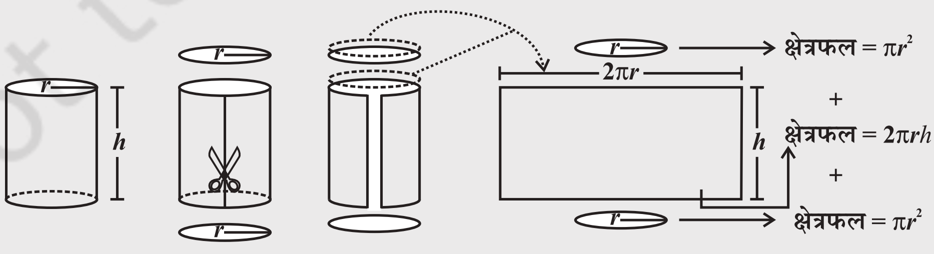
(i) एक बेलनाकार कैन अथवा डिब्बा लीजिए और इसके आधार का ग्राफ पेपर पर बनाइए और इसे काटकर बाहर निकाल लीजिए (आकृति 9.25(i))। एक ऐसा ग्राफ पेपर लीजिए जिसकी चौड़ाई कैन की ऊँचाई के समान हो। इस पट्टी को कैन के चारों ओर इस प्रकार लपेटिए ताकि यह कैन के चारों ओर बिल्कुल ठीक बैठे (अतिरिक्त कागज़ को हटा दीजिए) (आकृति 9.25(ii)) टुकड़ों को एक दूसरे से मिलाकर टेप लगाइए (आकृति 9.25(iii)) ताकि एक बेलन बन जाए (आकृति 9.25(iv)) कैन के चारों ओर लपेटे गए कागज़ का आकार क्या है।



आकृति 9.25

नि:संदेह यह आकार में आयताकार है। जब आप इस बेलन के भागों को एक दूसरे से मिलाकर टेप लगा देते हैं तो आयताकार पट्टी की लंबाई वृत्त की परिधि के समान है। वृत्ताकार आधार की त्रिज्या (r) और आयताकार पट्टी की लंबाई (l) एवं चौड़ाई (h) को नोट कीजिए। क्या $2\pi r$ = पट्टी की लंबाई? जाँच कीजिए क्या आयताकार पट्टी का क्षेत्रफल $2\pi rh$ है? गिनती कीजिए कि वर्गांकित कागज़ की कितनी वर्ग इकाई बेलन को निर्मित करने में उपयोग की गई है। जाँच कीजिए क्या यह गिनती $2\pi r\,(r + h)$ के मान के लगभग समान है।

(ii) हम बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल के रूप में संबंध $2\pi r\,(r + h)$ का निगमन दूसरी विधि से भी कर सकते हैं। जैसा निम्नलिखित आकृति में दर्शाया गया है वैसे ही एक बेलन को काटने की कल्पना कीजिए (आकृति 9.26):



आकृति 9.26

इसलिए बेलन का पार्श्व पृष्ठीय (वक्र पृष्ठीय) क्षेत्रफल $2\pi rh$ है।

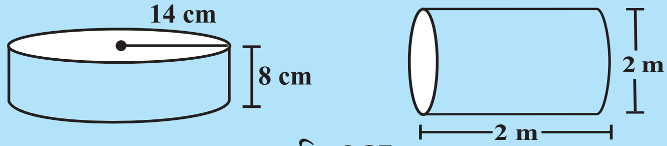
बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$ या $2\pi r\,(r + h)$

नोट : जब तक कुछ कहा न गया हो हम π का मान $\frac{22}{7}$ लेते हैं।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित बेलनों का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 9.27)

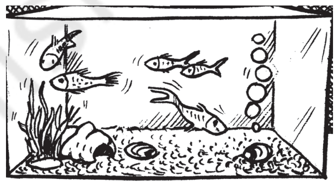


आकृति 9.27

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

नोट कीजिए कि किसी बेलन का पार्श्व पृष्ठीय (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, आधार की परिधि × बेलन की ऊँचाई के समान होता है। क्या हम घनाभ के पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल को आधार का परिमाप × घनाभ की ऊँचाई के रूप में लिख सकते हैं?

उदाहरण 4 : एक मछलीघर घनाभ के आकार का है जिसके बाह्य माप 80 cm × 30 cm × 40 cm हैं। इसके तल, पृष्ठभाग वाले फलक और पीछे वाले फलक को रंगीन कागज़ से ढकना है। आवश्यक कागज़ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : मछलीघर की लंबाई $= l = 80$ cm

मछलीघर की चौड़ाई $= b = 30$ cm

मछलीघर की ऊँचाई $= h = 40$ cm

आधार का क्षेत्रफल $= l \times b = 80 \times 30 = 2400\ cm^2$

पृष्ठभाग वाले फलक का क्षेत्रफल $= b \times h = 30 \times 40 = 1200\ cm^2$

पीछे वाले फलक का क्षेत्रफल $= l \times h = 80 \times 40 = 3200\ cm^2$

वांछित क्षेत्रफल = आधार का क्षेत्रफल + पीछे वाले फलक का क्षेत्रफल + (2 × पृष्ठभाग वाले फलक का क्षेत्रफल)

$= 2400 + 3200 + (2 \times 1200) = 8000\ cm^2$

अत: वांछित रंगीन कागज़ का क्षेत्रफल $8000\ cm^2$ है।

उदाहरण 5 : एक घनाभाकार कक्ष की आंतरिक माप 12 m × 8 m × 4 m है। यदि सफ़ेदी कराने का खर्च ₹ 5 प्रति वर्ग मीटर है तो उस कक्ष की चार दीवारों पर सफ़ेदी कराने का खर्च ज्ञात कीजिए। यदि उस कमरे की छत की भी सफ़ेदी कराई जाए तो सफ़ेदी कराने का खर्च कितना होगा?

हल : मान लीजिए, कमरे की लंबाई $= l = 12$ m

कमरे की चौड़ाई $= b = 8$ m , कमरे की ऊँचाई $= h = 4$ m

कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × कमरे की ऊँचाई

$= 2(l + b) \times h = 2(12 + 8) \times 4$

$= 2 \times 20 \times 4 = 160\ m^2$

सफ़ेदी कराने का प्रति वर्गमीटर खर्च = ₹ 5

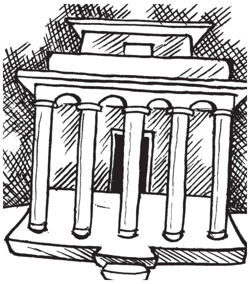
इसलिए कमरे की चार दीवारों पर सफ़ेदी कराने का कुल खर्च = 160 × 5 = ₹ 800

छत का क्षेत्रफल $= 12 \times 8 = 96\ m^2$

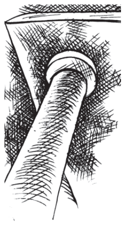
छत पर सफ़ेदी कराने का कुल खर्च = 96 × 5 = ₹ 480

सफ़ेदी कराने का कुल खर्च = 800 + 480 = ₹ 1280

© NCERT not to be republished



उदाहरण 6 : एक भवन में 24 बेलनाकार खंभे हैं। प्रत्येक खंभे की त्रिज्या 28 सेमी और ऊँचाई 4 मी है। ₹ 8 प्रति वर्ग मीटर की दर से सभी खंभे के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल पर पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।



हल : बेलनाकार खंभे की त्रिज्या, $r = 28 \text{ cm} = 0.28 \text{ m}$

ऊँचाई, $h = 4 \text{ m}$

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

खंभे का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2 \times \frac{22}{7} \times 0.28 \times 4 = 7.04 \text{ m}^2$

ऐसे 24 खंभों का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 7.04 \times 24 = 168.96 \text{ m}^2$

1 m^2 पर पेंट कराने का खर्च = ₹ 8

अत: 168.96 m^2 क्षेत्रफल पर पेंट कराने का खर्च $= 168.96 \times 8 =$ ₹ 1351.68

उदाहरण 7 : एक ऐसे बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 cm और कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 968 cm^2 है।

हल : मान लीजिए, बेलन की ऊँचाई $= h$, त्रिज्या $= r = 7\text{cm}$

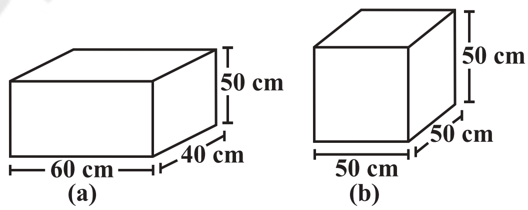
कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r (h + r)$

अर्थात् $2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (7 + h) = 968$ या $h = 15 \text{ cm}$

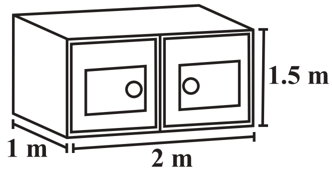
अत: बेलन की ऊँचाई 15 cm है।

प्रश्नावली 9.2

1. दो घनाभाकार डिब्बे हैं जैसा कि संलग्न आकृति में दर्शाया गया है। किस डिब्बे को बनाने के लिए कम सामग्री की आवश्यकता है?



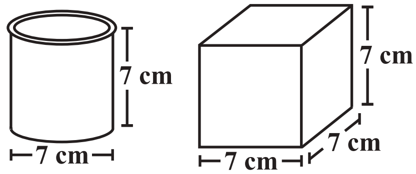
2. $80 \text{ cm} \times 48 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$ माप वाले एक सूटकेस को तिरपाल के कपड़े से ढकना है। ऐसे 100 सूटकेसों को ढकने के लिए 96 cm चौड़ाई वाले कितने मीटर तिरपाल के कपड़े की आवश्यकता है?
3. एक ऐसे घन की भुजा ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 600 cm^2 है।
4. रूखसार ने $1 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 1.5 \text{ m}$ माप वाली एक पेटी को बाहर से पेंट किया। यदि उसने पेटी के तल के अतिरिक्त उसे सभी जगह से पेंट किया हो तो ज्ञात कीजिए कि उसने कितने पृष्ठीय क्षेत्रफल को पेंट किया।



5. डैनियल एक ऐसे घनाभाकार कमरे की दीवारों और छत को पेंट कर रहा है जिसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 15 m, 10 m एवं 7 m हैं। पेंट की प्रत्येक कैन की सहायता से 100 m^2 क्षेत्रफल को पेंट किया जा सकता है। तो उस कमरे के लिए उसे पेंट की कितनी कैनों की आवश्यकता होगी?

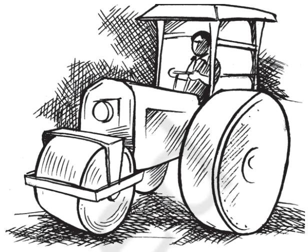
© NCERT not to be republished

6. वर्णन कीजिए कि दाईं तरफ दी गई आकृतियाँ किस प्रकार एक समान हैं और किस प्रकार एक दूसरे से भिन्न हैं? किस डिब्बे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है?



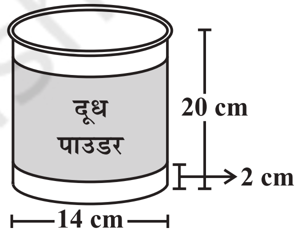
7. 7 m त्रिज्या और 3 m ऊँचाई वाला एक बंद बेलनाकार टैंक किसी धातु की एक चादर से बना हुआ है। उसे बनाने के लिए वांछित धातु की चादर की मात्रा ज्ञात कीजिए।

8. एक खोखले बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4224 cm^2 है। इसे इसकी ऊँचाई के अनुदिश काटकर 32 cm चौड़ाई की एक आयताकार चादर बनाई जाती है। आयताकार चादर का परिमाप ज्ञात कीजिए।



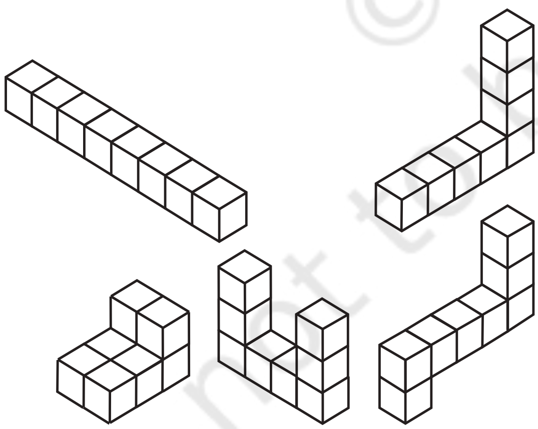
9. किसी सड़क को समतल करने के लिए एक सड़क रोलर को सड़क के ऊपर एक बार घूमने के लिए 750 चक्कर लगाने पड़ते हैं। यदि सड़क रोलर का व्यास 84 cm और लंबाई 1 m है तो सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. एक कंपनी अपने दूध पाउडर को ऐसे बेलनाकार बर्तनों में पैक करती है जिनका व्यास 14 cm और ऊँचाई 20 cm है। कंपनी बर्तन के पृष्ठ के चारों ओर एक लेबल लगाती है (जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है)। यदि यह लेबल बर्तन के तल और शीर्ष दोनों से 2 cm की दूरी पर चिपकाया जाता है तो लेबल का क्षेत्रफल क्या है?



9.5 घन, घनाभ और बेलन का आयतन

एक त्रिविमीय वस्तु द्वारा घिरी हुई जगह उसका **आयतन** कहलाता है। अपने आसपास की वस्तुओं के आयतन की तुलना करने का प्रयत्न कीजिए। उदाहरणतः किसी कमरे के अंदर रखी हुई अलमारी की तुलना में कमरे का आयतन अधिक है। इसी प्रकार आपके पेंसिल बक्स का आयतन इसके अंदर रखे पेन और मिटाने वाली रबर के आयतन से अधिक है। क्या आप इनमें से किसी भी वस्तु का आयतन माप सकते हैं?



आकृति 9.28

स्मरण कीजिए, हम किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्ग इकाई का उपयोग करते हैं। यहाँ हम ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए घन इकाई का उपयोग करेंगे क्योंकि घन सबसे अधिक सुविधाजनक ठोस आकार हैं (ठीक उसी प्रकार जैसे किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल मापने के लिए वर्ग सबसे अधिक सुविधाजनक आकार है)।

क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम क्षेत्र को वर्ग इकाइयों में विभाजित करते हैं, इसी प्रकार, किसी ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए हमें उस ठोस को घन इकाइयों में विभाजित करने की आवश्यकता है।

विचार कीजिए कि निम्नलिखित ठोसों में से प्रत्येक का आयतन 8 घन इकाई है (आकृति 9.28)।

© NCERT not to be republished

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि किसी ठोस का आयतन मापने के लिए हम उसमें स्थित घन इकाइयों को गिनते हैं।

1 घन सेंटीमीटर $= 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3$

$= 10\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 10\text{ mm} = \text{..............}\text{ mm}^3$

1 घन मीटर $= 1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m} = 1\text{ m}^3$

$= \text{..............................}\text{ cm}^3$

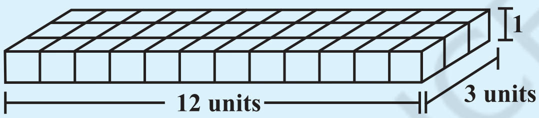
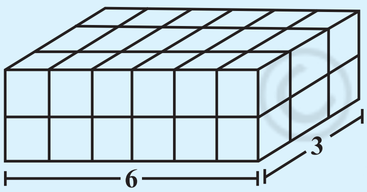
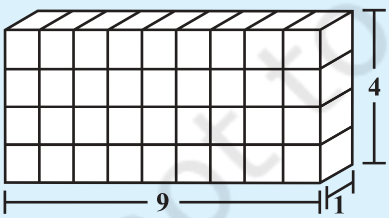
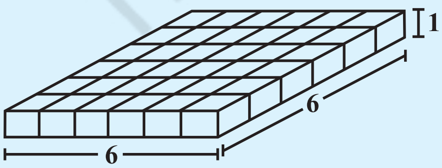
1 घन मिलीमीटर $= 1\text{ mm} \times 1\text{ mm} \times 1\text{ mm} = 1\text{ mm}^3$

$= 0.1\text{ cm} \times 0.1\text{ cm} \times 0.1\text{ cm} = \text{.....................}\text{ cm}^3$

अब हम घनाभ, घन और बेलन का आयतन ज्ञात करने के लिए कुछ व्यंजक (सूत्र) ज्ञात करते हैं। आइए, प्रत्येक ठोस पर एक-एक करके चर्चा करते हैं।

9.5.1 घनाभ

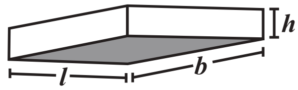
समान आकार (प्रत्येक घन की लंबाई समान) वाले 36 घन लीजिए एक घनाभ बनाने के लिए उन्हें व्यवस्थित कीजिए। आप इन्हें अनेक रूपों में व्यवस्थित कर सकते हैं। निम्नलिखित सारणी पर विचार कीजिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

	घनाभ	लंबाई	चौड़ाई	ऊँचाई	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

आप क्या देखते करते हैं?

© NCERT not to be republished

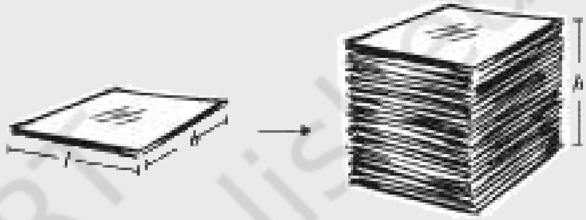
क्योंकि इन घनाभों को बनाने के लिए हमने 36 घनों का उपयोग किया है इसलिए प्रत्येक घनाभ का आयतन 36 घन इकाई है। इसके अतिरिक्त प्रत्येक घनाभ का आयतन उसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के गुणनफल के समान है। उपर्युक्त उदाहरण से हम कह सकते हैं कि घनाभ का आयतन $= l \times b \times h$ है। क्योंकि $l \times b$ आधार का क्षेत्रफल है इसलिए हम यह भी कह सकते हैं कि घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई।



इन्हें कीजिए

एक कागज़ की शीट लीजिए और इसके क्षेत्रफल को मापिए। इसी के समान आकार वाली कागज़ की शीटों का ढेर लगाकर एक घनाभ बनाइए (आकृति 9.29)। इस ढेर की ऊँचाई मापिए। शीट के क्षेत्रफल और शीटों की ऊँचाई का गुणनफल ज्ञात करते हुए घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।

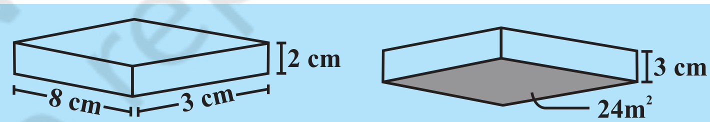
यह क्रियाकलाप इस विचार को दर्शाता है कि ठोस के आयतन का निगमन इस विधि से भी किया जा सकता है (यदि किसी ठोस का आधार और शीर्ष सर्वांगसम हैं और एक दूसरे के समांतर हैं और इसके किनारे आधार पर लंब हैं) क्या आप ऐसी वस्तुओं के बारे में सोच सकते हैं जिनका आयतन इस विधि का उपयोग करते हुए ज्ञात किया जा सकता है?



आकृति 9.29

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित घनाभों (आकृति 9.30) का आयतन ज्ञात कीजिए :



आकृति 9.30

9.5.2 घन

घन, घनाभ का एक अनोखा (विशेष) उदाहरण है जिसमें $l = b = h$. अत: घन का आयतन $= l \times l \times l = l^3$

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित घनों का आयतन ज्ञात कीजिए :

(a) 4 cm भुजा वाला (b) 1.5 m भुजा वाला

इन्हें कीजिए

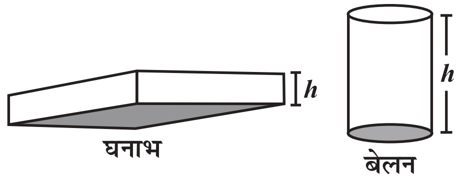
समान आकार वाले 64 घनों को जितने रूपों में आप व्यवस्थित कर सकते हैं उतने रूपों में व्यवस्थित करते हुए घनाभ बनाइए। प्रत्येक रूप का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या समान आयतन वाली ठोस आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल समान होता है?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

एक कंपनी बिस्कुट बेचती है। बिस्कुटों को पैक करने के लिए घनाभाकार डिब्बों का उपयोग किया जा रहा है। डिब्बा A → 3 cm × 8 cm × 20 cm, डिब्बा B → 4 cm × 12 cm × 10 cm

> डिब्बे का कौन सा आकार कंपनी के लिए आर्थिक दृष्टि से लाभदायक रहेगा? क्यों? क्या आप ऐसे किसी और आकार (विमाएँ) के डिब्बे का सुझाव दे सकते हैं जिसका आयतन इनके समान हो परंतु इनकी तुलना में आर्थिक दृष्टि से अधिक लाभदायक हो।

9.5.3 बेलन



हम जानते हैं कि घनाभ का आयतन उसके आधार के क्षेत्रफल और ऊँचाई का गुणनफल ज्ञात करते हुए ज्ञात किया जा सकता है। क्या इसी प्रकार हम बेलन का आयतन ज्ञात कर सकते हैं?

घनाभ की तरह बेलन में भी एक आधार और शीर्ष होता है जो एक दूसरे के सर्वांगसम और समांतर होते हैं। घनाभ की तरह इसका वक्रपृष्ठ आधार पर लंब होता है।

इसलिए घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= l \times b \times h = lbh$

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

9.6 आयतन और धारिता

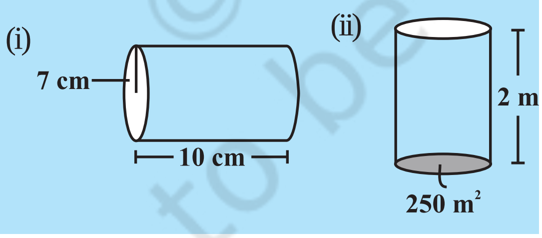
इन दो शब्दों में अधिक अंतर नहीं है।

(a) किसी वस्तु द्वारा घिरी हुई जगह की मात्रा उसका आयतन कहलाता है।

(b) किसी बर्तन में भरी गई वस्तु की मात्रा उसकी धारिता कहलाती है।

प्रयास कीजिए

संलग्न बेलनों का आयतन ज्ञात कीजिए :



नोट : यदि किसी पानी रखे जाने वाले टिन के बर्तन में 100 cm^3 पानी भरा जा सकता है तो उस टिन के बर्तन की धारिता 100 cm^3 है।

धारिता को लीटरों में भी मापा जाता है। लीटर और cm^3 में निम्नलिखित संबंध है : 1 mL = 1 cm^3, 1 L = 1000 cm^3. अत: 1 m^3 = 1000000 cm^3 = 1000 L.

उदाहरण 8 : एक ऐसे घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 275 cm^3 और आधार का क्षेत्रफल 25 cm^2 है।

हल : घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

अत: घनाभ की ऊँचाई $= \dfrac{\text{घनाभ का आयतन}}{\text{आधार का क्षेत्रफल}} = \dfrac{275}{25} = 11$ cm

इस प्रकार घनाभ की ऊँचाई 11 cm है।

उदाहरण 9 : एक घनाभाकार गोदाम, जिसकी माप 60 m × 40 m × 30 m है, के अंदर कितने घनाभाकार डिब्बे रखे जा सकते हैं, यदि एक डिब्बे का आयतन 0.8 मी³ है?

हल : एक डिब्बे का आयतन = 0.8 मी³

गोदाम का आयतन = 60 × 40 × 30 = 72000 मी³

© NCERT not to be republished

$$\text{गोदाम के अंदर रखे जा सकने वाले डिब्बों की संख्या} = \frac{\text{गोदाम का आयतन}}{\text{1 डिब्बे का आयतन}}$$

$$= \frac{60 \times 40 \times 30}{0.8} = 90{,}000$$

इस प्रकार गोदाम के अंदर रखे जा सकने वाले डिब्बों की संख्या 90,000 है।

उदाहरण 10 : 14 cm चौड़ाई वाले एक आयताकार कागज़ को चौड़ाई के अनुदिश मोड़कर 20 cm त्रिज्या वाला एक बेलन बनाया जाता है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए (आकृति 9.31)। (π के लिए $\frac{22}{7}$ लीजिए)

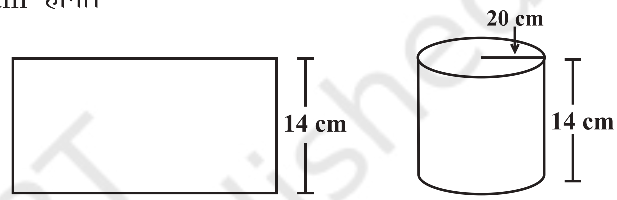
हल : कागज़ का चौड़ाई के अनुदिश मोड़कर बेलन का निर्माण किया गया है, इसलिए कागज़ की चौड़ाई बेलन की ऊँचाई होगी और बेलन की त्रिज्या 20 cm होगी।

बेलन की ऊँचाई $= h = 14$ cm

त्रिज्या $= r = 20$ cm

बेलन का आयतन $= V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14 = 17600 \text{ cm}^3$$



आकृति 9.31

अत: बेलन का आयतन 17600 cm^3 है।

उदाहरण 11 : 11 cm × 4 cm माप वाले आयताकार कागज़ के टुकड़े को बिना अतिव्यापन किए, मोड़कर एक 4cm ऊँचाई का बेलन बनाया जाता है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : कागज़ की लंबाई बेलन के आधार की परिधि बन जाती है और चौड़ाई, ऊँचाई बन जाती है। मान लीजिए बेलन की त्रिज्या $= r$ और ऊँचाई $= h$

बेलन के आधार की परिधि $= 2\pi r = 11$

अथवा $2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$

इसलिए $r = \frac{7}{4}$ cm

बेलन का आयतन $= V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 \text{ cm}^3 = 38.5 \text{ cm}^3.$$

अत: बेलन का आयतन 38.5 cm^3 है।

प्रश्नावली 9.3

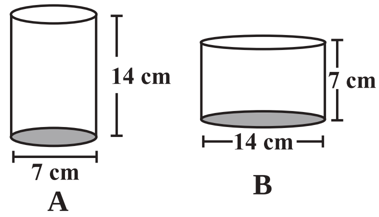
1. आपको एक बेलनाकार टैंक दिया हुआ है, निम्नलिखित में से किस स्थिति में आप उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे और किस स्थिति में आयतन :

(a) यह ज्ञात करने के लिए कि इसमें कितना पानी रखा जा सकता है।

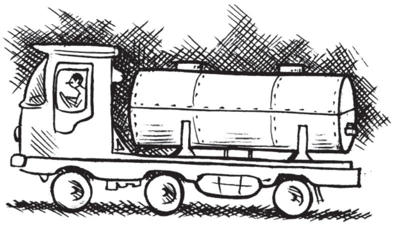
(b) इसका प्लास्टर करने के लिए वांछित सीमेंट बोरियों की संख्या।

(c) इसमें भरे पानी से भरे जाने वाले छोटे टैंकों की संख्या।

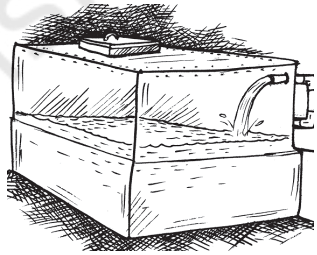
2. बेलन A का व्यास 7 cm और ऊँचाई 14 cm है। बेलन B का व्यास 14 cm और ऊँचाई 7 cm है। परिकलन किए बिना क्या आप बता सकते हैं कि इन दोनों में किसका आयतन अधिक है। दोनों बेलनों का आयतन ज्ञात करते हुए इसका सत्यापन कीजिए। जाँच कीजिए कि क्या अधिक आयतन वाले बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल भी अधिक है।



3. एक ऐसे घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसके आधार का क्षेत्रफल 180 cm^2 और जिसका आयतन 900 cm^3 है?

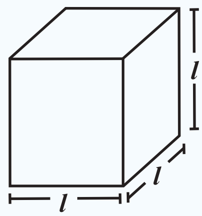


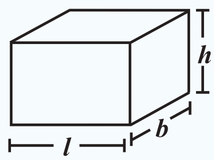
4. एक घनाभ की विमाएँ 60 cm × 54 cm × 30 cm हैं। इस घनाभ के अंदर 6 cm भुजा वाले कितने छोटे घन रखे जा सकते हैं।
5. एक ऐसे बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 1.54 m^3 और जिसके आधार का व्यास 140 cm है?
6. एक दूध का टैंक बेलन के आकार का है जिसकी त्रिज्या 1.5 m और लंबाई 7 m है। इस टैंक में भरे जा सकने वाले दूध की मात्रा लीटर में ज्ञात कीजिए।
7. यदि किसी घन के प्रत्येक किनारे को दुगुना कर दिया जाए, तो
   (i) इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितने गुना वृद्धि होगी?
   (ii) इसके आयतन में कितने गुना वृद्धि होगी?
8. एक कुंड के अंदर 60 लीटर प्रति मिनट की दर से पानी गिर रहा है। यदि कुंड का आयतन 108 m^3 है, तो ज्ञात कीजिए कि इस कुंड को भरने में कितने घंटे लगेंगे?

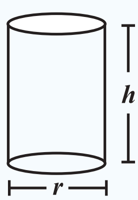


हमने क्या चर्चा की ?

1. एक ठोस का **पृष्ठीय क्षेत्रफल** इसके फलकों के क्षेत्रफलों के योग के समान होता है।
2. घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + hl)$
   घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6l^2$
   बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(r + h)$
3. किसी ठोस द्वारा घिरी हुई जगह की मात्रा इसका **आयतन** कहलाती है।
4. घनाभ का आयतन $= l \times b \times h$
   घन का आयतन $= l^3$
   बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$
5. (i) $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$
   (ii) $1\text{L} = 1000 \text{ cm}^3$
   (iii) $1 \text{ m}^3 = 1000000 \text{ cm}^3 = 1000\text{L}$







© NCERT not to be republished

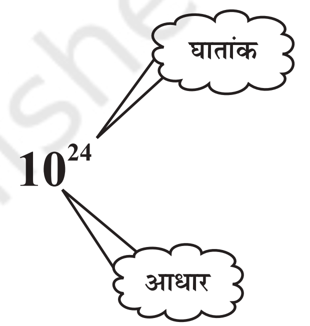
अध्याय 10

घातांक और घात

10.1 भूमिका

क्या आप जानते हैं?

पृथ्वी का द्रव्यमान 5,970,000,000,000, 000, 000, 000, 000 kg है। हम पिछली कक्षा में पहले ही पढ़ चुके हैं कि इस प्रकार की बड़ी संख्याओं को (ज्यादा सुविधाजनक) घातांकों को उपयोग करते हुए कैसे लिख सकते हैं जैसे 5.97×10^{24} kg ।



हम कहते हैं कि 10 की घात 24 ।

हम 10^{24} को 10 की घात 24 पढ़ते हैं।

हम जानते हैं $\quad 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

तथा $\quad 2^m = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times 2$ (m बार)

2^{-2} किसके बराबर है अब हमें ज्ञात करना चाहिए?

यहाँ घातांक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

10.2 ऋणात्मक घातांकों की घात

आप जानते हैं कि $\quad 10^2 = 10 \times 10 = 100$

$$10^1 = 10 = \frac{100}{10}$$

$$10^0 = 1 = \frac{10}{10}$$

$$10^{-1} = ?$$

जब घातांक 1 से कम होता है तब मान पूर्व मान का $\frac{1}{10}$ वाँ भाग हो जाता है

ऊपर के प्रतिरूप को आगे बढ़ाते हुए

हम पाते हैं $\quad 10^{-1} = \frac{1}{10}$

इसी प्रकार $\quad 10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$ । 10^{-10} किसके बराबर है?

© NCERT not to be republished

निम्नलिखित को जानिए।

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9 = \frac{27}{3}$$

$$3^1 = 3 = \frac{9}{3}$$

$$3^\circ = 1 = \frac{3}{3}$$

संख्या को आधार 3 से विभाजित किया है।

इस प्रकार उपरोक्त प्रतिरूप को देखने पर हम कहते हैं

$$3^{-1} = 1 \div 3 = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^2} \div 3 = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$$

इसी प्रकार 10^{-2} से पुनः आप प्राप्त कर सकते हैं,

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} \quad \text{या} \quad 10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} \quad \text{या} \quad 10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} \quad \text{या} \quad 3^2 = \frac{1}{3^{-2}}$$ इत्यादि।

साधारणतया हम कह सकते हैं कि किसी शून्येतर परिमेय संख्या a, के लिए $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, जहाँ m एक धनात्मक परिमेय संख्या है। a^{-m}, a^m का गुणात्मक प्रतिलोम है।

प्रयास कीजिए

गुणात्मक प्रतिलोम लिखिए :

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) 7^{-2} (iv) 5^{-3} (v) 10^{-100}

$10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

हमने सीखा कि संख्याओं को विस्तारित घातांक रूप में कैसे लिख सकते हैं, जैसे

$$1425 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^\circ$$

अब हमें देखना चाहिए कि 1425.36 को विस्तारित रूप में कैसे व्यक्त कर सकते हैं।

हम जानते हैं $1425.36 = 1 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100}$

$$= 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + 3 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$$

प्रयास कीजिए

घातांकों का उपयोग करते हुए निम्न को विस्तारित रूप में लिखिए।

(i) 1025.63 (ii) 1256.249

© NCERT not to be republished

10.3 घातांक के नियम

हम सीख चुके हैं कि कोई भी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$, जहाँ m और n प्राकृत संख्याएँ हैं। यदि घातांक ऋणात्मक है तो भी क्या यह नियम सत्य है? हमें खोजना चाहिए।

(i) हम जानते हैं कि $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3}$ और $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2}$

$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ कोई शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए

अतः, $2^{-3} \times 2^{-2} = \dfrac{1}{2^3} \times \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{2^3 \times 2^2} = \dfrac{1}{2^{3+2}} = 2^{-5}$

-5 दो घातांकों -3 और -2 का योग है।

(ii) $(-3)^{-4} \times (-3)^{-3}$ लेने पर

$$(-3)^{-4} \times (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^4} \times \frac{1}{(-3)^3}$$

$$= \frac{1}{(-3)^4 \times (-3)^3} = \frac{1}{(-3)^{4+3}} = (-3)^{-7}$$

$(-4) + (-3) = -7$

(iii) अब $5^{-2} \times 5^4$ को लिखिए।

$(-2) + 4 = 2$

$$5^{-2} \times 5^4 = \frac{1}{5^2} \times 5^4 = \frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^{(2)}$$

कक्षा VII में आप सीख चुके हैं कि कोई भी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, जहाँ m और n प्राकृत संख्याएँ हैं और $m > n$.

(iv) अब $(-5)^{-4} \times (-5)^2$ को लिखिए।

$$(-5)^{-4} \times (-5)^2 = \frac{1}{(-5)^4} \times (-5)^2 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4} = \frac{1}{(-5)^4 \times (-5)^{-2}}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{4-2}} = (-5)^{-(2)}$$

$(-4) + 2 = -2$

साधारणतया हम कह सकते हैं कि किसी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$, जहाँ m और n परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए

घातांक रूप को सरल कीजिए और लिखिए :

(i) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$ (ii) $p^3 \times p^{-10}$ (iii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$

इसी प्रकार आप निम्न घातांकों के नियमों को सत्यापित कर सकते हैं जहाँ a और b शून्येतर परिमेय संख्याएँ और m, n कोई पूर्णांक हैं।

(i) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

इन नियमों को आप कक्षा VII में धनात्मक घातांक में भी सीख चुके हैं।

(iv) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ (v) $a^0 = 1$

आइए, उपरोक्त घातांकों के नियमों का उपयोग करते हुए कुछ उदाहरणों को हल करते हैं।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 1 : मान ज्ञात कीजिए :

(i) 2^{-3} (ii) $\frac{1}{3^{-2}}$

हल :

(i) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 3 \times 3 = 9$

उदाहरण 2 : सरल कीजिए :

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10}$ (ii) $2^5 \div 2^{-6}$

हल :

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10} = (-4)^{(5-10)} = (-4)^{-5} = \frac{1}{(-4)^5}$ ($a^m \times a^n = a^{m+n}$ तथा $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$)

(ii) $2^5 \div 2^{-6} = 2^{5-(-6)} = 2^{11}$ ($a^m \div a^n = a^{m-n}$)

उदाहरण 3 : 4^{-3} को घात और उसके आधार 2 के रूप में लिखिए।

हल : हमें प्राप्त है, $4 = 2 \times 2 = 2^2$

अतः $(4)^{-3} = (2 \times 2)^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{2 \times (-3)} = 2^{-6}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

उदाहरण 4 : सरल कीजिए और उत्तर घातांक के रूप में लिखिए।

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5}$ (ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3}$

(iii) $\frac{1}{8} \times (3)^{-3}$ (iv) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$

हल :

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5} = (2^{5-8})^5 \times 2^{-5} = (2^{-3})^5 \times 2^{-5} = 2^{-15-5} = 2^{-20} = \frac{1}{2^{20}}$

(ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3} = [(-4) \times 5 \times (-5)]^{-3} = [100]^{-3} = \frac{1}{100^3}$

[नियम से $a^m \times b^m = (ab)^m$, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$]

(iii) $\frac{1}{8} \times (3)^{-3} = \frac{1}{2^3} \times (3)^{-3} = 2^{-3} \times 3^{-3} = (2 \times 3)^{-3} = 6^{-3} = \frac{1}{6^3}$

(iv) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = (-1 \times 3)^4 \times \frac{5^4}{3^4} = (-1)^4 \times 3^4 \times \frac{5^4}{3^4}$

$= (-1)^4 \times 5^4 = 5^4$ $[(-1)^4 = 1]$

उदाहरण 5 : m का मान ज्ञात कीजिए ताकि $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

हल : $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

$(-3)^{m+1+5} = (-3)^7$

$(-3)^{m+6} = (-3)^7$

दोनों ओर की घातों के आधार समान हैं जो 1 तथा –1 से भिन्न हैं, अतः उनके घातांक समान होने चाहिए।

अतः $m + 6 = 7$ या $m = 7 - 6 = 1$

> $a^n = 1$ यदि $n = 0$ है। $a = 1$ या $a = -1$ के अतिरिक्त किसी भी a के लिए यह होगा। $a = 1$ के लिए $1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^{-2} = ... = 1$ या $(1)^n = 1$ असीमित n के लिए। $a = -1$ के लिए , $(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^{-2} = ... = 1$ या $(-1)^p = 1$, p कोई सम पूर्णांक।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 6 : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ का मान प्राप्त कीजिए।

हल : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

अतः साधारणतः, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

उदाहरण 7 : सरल कीजिए

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{5}$

हल :

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left\{\frac{1^{-2}}{3^{-2}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right\} \div \frac{1^{-2}}{4^{-2}}$

$$= \left\{\frac{3^2}{1^2} - \frac{2^3}{1^3}\right\} \div \frac{4^2}{1^2} = \{9-8\} \div 16 = \frac{1}{16}$$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5} = \frac{5^{-7}}{8^{-7}} \times \frac{8^{-5}}{5^{-5}} = \frac{5^{-7}}{5^{-5}} \times \frac{8^{-5}}{8^{-7}} = 5^{(-7)-(-5)} \times 8^{(-5)-(-7)}$

$$= 5^{-2} \times 8^2 = \frac{8^2}{5^2} = \frac{64}{25}$$

प्रश्नावली 10.1

1. मान ज्ञात कीजिए :

(i) 3^{-2} (ii) $(-4)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

2. सरल कीजिए और उत्तर को धनात्मक घातांक के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $(-4)^5 \div (-4)^8$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$

(iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$ (iv) $(3^{-7} \div 3^{-10}) \times 3^{-5}$ (v) $2^{-3} \times (-7)^{-3}$

3. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(3^{\circ} + 4^{-1}) \times 2^2$ (ii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(iv) $(3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1})^0$ (v) $\left\{\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right\}^2$

4. मान ज्ञात कीजिए : (i) $\frac{8^{-1} \times 5^3}{2^{-4}}$ (ii) $(5^{-1} \times 2^{-1}) \times 6^{-1}$

© NCERT not to be republished

5. m का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $5^m \div 5^{-3} = 5^5$

6. मान ज्ञात कीजिए : (i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$

7. सरल कीजिए।

(i) $\dfrac{25 \times t^{-4}}{5^{-3} \times 10 \times t^{-8}}$ $(t \neq 0)$ (ii) $\dfrac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 125}{5^{-7} \times 6^{-5}}$

10.4 छोटी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग कर मानक रूप में व्यक्त करना

निम्न तथ्यों का अवलोकन कीजिए :

1. पृथ्वी से सूर्य की दूरी 149,600,000,000 m है।
2. प्रकाश का वेग 300,000,000 m/s है।
3. कक्षा VII की गणित की पुस्तक की मोटाई 20 mm है।
4. लाल रक्त कोशिकाओं का औसत व्यास 0.000007 mm
5. मनुष्य के बाल की मोटाई की परास 0.005 cm से 0.01 cm होती है।
6. पृथ्वी से चंद्रमा की दूरी लगभग 384,467,000 m होती है।
7. पौधों की कोशिकाओं का आकार 0.00001275 m है।
8. सूर्य की औसत त्रिज्या 695000 km है।
9. अंतरिक्ष शटल में ठोस राकेट बूस्टर को प्रेरित करने के लिए शटल का द्रव्यमान 503600 kg है।
10. एक कागज़ की मोटाई 0.0016 cm है।
11. कंप्यूटर चिप के एक तार का व्यास 0.000003 m है।
12. माउंट एवरेस्ट की ऊँचाई 8848 m है।

यहाँ कुछ संख्याओं का अवलोकन कीजिए जो हम पढ़ सकते हैं जैसे, 2 cm, 8848 m 6,95,000 km । यहाँ कुछ बड़ी संख्याएँ भी हैं जैसे 150,000,000,000 m और कुछ बहुत छोटी संख्याएँ हैं जैसे 0.000007 m ।

उपरोक्त तथ्यों के आधार पर बहुत बड़ी और बहुत छोटी संख्याओं की पहचान कीजिए और संगत सारणी में लिखिए।

बहुत बड़ी संख्याएँ	बहुत छोटी संख्याएँ
150,000,000,000 m	0.000007 m
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------

पिछली कक्षा में हमने सीखा कि किसी बहुत बड़ी संख्या को मानक रूप में कैसे व्यक्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$ । अब हमें 0.000007 को मानक रूप में व्यक्त करना चाहिए।

$$0.000007 = \frac{7}{1000000} = \frac{7}{10^6} = 7 \times 10^{-6}$$

$$0.000007 \text{ m} = 7 \times 10^{-6} \text{ m}$$

इसी तरह एक कागज़ की मोटाई जो कि 0.0016 cm है, लिखिए।

$$0.0016 = \frac{16}{10000} = \frac{1.6 \times 10}{10^4} = 1.6 \times 10 \times 10^{-4}$$

$$= 1.6 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

अतः हम कह सकते हैं कि कागज़ की मोटाई 1.6×10^{-3} cm है।

150000000000. दशमलव 11 स्थान बाईं तरफ़ खिसक गया है
11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

0.000007 दशमलव छः स्थान दाईं तरफ़ खिसक गया है।
1 2 3 4 5 6

पुनः ध्यान दीजिए :
0.0016 दशमलव तीन स्थान दाईं तरफ़ खिसक गया है।
1 2 3

प्रयास कीजिए

1. निम्न संख्याओं को मानक रूप में लिखिए।
   (i) 0.000000564 (ii) 0.0000021 (iii) 21600000 (iv) 15240000
2. दिए गए तथ्यों को मानक रूप में लिखिए।

10.4.1 बहुत बड़ी संख्याओं और बहुत छोटी संख्याओं की तुलना

सूर्य का व्यास 1.4×10^9 m और पृथ्वी का व्यास 1.2756×10^7 m है। हम इनके व्यासों की तुलना करना चाहते हैं। सूर्य का व्यास = 1.4×10^9 m; पृथ्वी का व्यास = 1.2756×10^7 m

अतः $\frac{1.4 \times 10^9}{1.2756 \times 10^7} = \frac{1.4 \times 10^{9-7}}{1.2756} = \frac{1.4 \times 100}{1.2756}$ जो कि लगभग 100 गुना है।

अतः सूर्य का व्यास, पृथ्वी के व्यास का लगभग 100 गुना है। लाल रक्त कोशिकाएँ जो कि 0.000007 m माप की है और पौधों की कोशिकाएँ जो कि 0.00001275 m माप की है इनके मापों की तुलना कीजिए।

लाल रक्त कोशिकाओं का आकार = 0.000007 m = 7×10^{-6} m

पौधों की कोशिकाओं का आकार = 0.00001275 m = 1.275×10^{-5} m

अतः, $\frac{7 \times 10^{-6}}{1.275 \times 10^{-5}} = \frac{7 \times 10^{-6-(-5)}}{1.275} = \frac{7 \times 10^{-1}}{1.275} = \frac{0.7}{1.275} = \frac{0.7}{1.3} = \frac{1}{2}$ (लगभग)

अतः लाल रक्त कोशिकाएँ आकार में, पौधों की कोशिकाओं की लगभग आधी हैं।

पृथ्वी का द्रव्यमान 5.97×10^{24} kg और चंद्रमा का द्रव्यमान 7.35×10^{22} kg है। दोनों का कुल द्रव्यमान क्या होगा?

कुल द्रव्यमान = 5.97×10^{24} kg + 7.35×10^{22} kg

$= 5.97 \times 100 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= 597 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= (597 + 7.35) \times 10^{22} = 604.35 \times 10^{22}$ kg

जब हम मानक रूप में लिखी संख्याओं को जोड़ते हैं तब हम इन्हें 10 की समान घात में बदलते हैं।

सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी 1.496×10^{11} m और पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी 3.84×10^8 m है। सूर्य ग्रहण के दौरान चंद्रमा पृथ्वी और सूर्य के बीच आ जाता है। इस समय चंद्रमा और सूर्य के बीच की दूरी कितनी होती है?

सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी = 1.496×10^{11} m

पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी = 3.84×10^8 m

सूर्य और चंद्रमा के बीच की दूरी = $1.496 \times 10^{11} - 3.84 \times 10^8$

$= 1.496 \times 1000 \times 10^8 - 3.84 \times 10^8$
$= (1496 - 3.84) \times 10^8 \text{ m} = 1492.16 \times 10^8 \text{ m}$

उदाहरण 8 : निम्न संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 0.000035 (ii) 4050000

हल : (i) $0.000035 = 3.5 \times 10^{-5}$ (ii) $4050000 = 4.05 \times 10^6$

उदाहरण 9 : निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 3.52×10^5 (ii) 7.54×10^{-4} (iii) 3×10^{-5}

हल :

(i) $3.52 \times 10^5 = 3.52 \times 100000 = 352000$

(ii) $7.54 \times 10^{-4} = \dfrac{7.54}{10^4} = \dfrac{7.54}{10000} = 0.000754$

(iii) $3 \times 10^{-5} = \dfrac{3}{10^5} = \dfrac{3}{100000} = 0.00003$

एक बार पुनः हमें मानक रूप में दी गई संख्याओं को समान घातांक वाली संख्याओं में बदलना है।

प्रश्नावली 10.2

1. निम्न संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :
   (i) 0.0000000000085 (ii) 0.00000000000942
   (iii) 6020000000000000 (iv) 0.00000000837
   (v) 31860000000
2. निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में व्यक्त कीजिए :
   (i) 3.02×10^{-6} (ii) 4.5×10^4 (iii) 3×10^{-8}
   (iv) 1.0001×10^9 (v) 5.8×10^{12} (vi) 3.61492×10^6
3. निम्नलिखित कथनों में जो संख्या प्रकट हो रही है उन्हें मानक रूप में व्यक्त कीजिए :
   (i) 1 माईक्रॉन $\dfrac{1}{1000000}$ m के बराबर होता है।
   (ii) एक इलेक्ट्रॉन का आवेश 0.000,000,000,000,000,000,16 कुलंब होता है।
   (iii) जीवाणु की माप 0.0000005 m है।
   (iv) पौधों की कोशिकाओं की माप 0.00001275 m है।
   (v) मोटे कागज़ की मोटाई 0.07 mm है।
4. एक ढेर में पाँच किताबें हैं जिनमें प्रत्येक की मोटाई 20 mm तथा पाँच कागज़ की शीटें हैं जिनमें प्रत्येक की मोटाई 0.016 mm है। इस ढेर की कुल मोटाई ज्ञात कीजिए।

हमने क्या चर्चा की ?

1. ऋणात्मक घातांकों वाली संख्याएँ निम्न नियमों का पालन करती हैं।
   (a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$
   (d) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (e) $a^0 = 1$ (f) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$
2. ऋणात्मक घातांकों का उपयोग करते हुए बहुत छोटी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

अध्याय

11

सीधा और प्रतिलोम समानुपात

0853CH13

11.1 भूमिका

मोहन स्वयं अपने और अपनी बहन के लिए चाय बनाता है। वह 300 mL पानी, 2 चम्मच चीनी, 1 चम्मच चाय-पत्ती और 50 mL दूध का उपयोग करता है। यदि वह पाँच व्यक्तियों के लिए चाय बनाए, तो उसे प्रत्येक वस्तु की कितनी मात्रा की आवश्यकता होगी?

यदि दो विद्यार्थी किसी सभा के लिए कुर्सियाँ व्यवस्थित करने में 20 मिनट का समय लगाते हैं, तो इसी कार्य को करने में 5 विद्यार्थी कितना समय लेंगे?

हमें अपने दैनिक जीवन में ऐसी अनेक स्थितियों का सामना करना पड़ता है, जहाँ हमें यह देखना आवश्यक हो जाता है कि एक राशि में परिवर्तन होने से दूसरी राशि में भी परिवर्तन हो रहा है।

उदाहरणार्थ :

(i) यदि खरीदी गई वस्तुओं की संख्या में वृद्धि होती है, तो उनके कुल मूल्य में भी वृद्धि होती है।

(ii) बैंक में जितनी धनराशि अधिक जमा की जाएगी, उतना ही ब्याज अधिक अर्जित होगा।

(iii) जब किसी वाहन की चाल में वृद्धि होती है, उसके द्वारा वही दूरी तय करने में लिए गए समय में कमी होती है।

(iv) एक दिए हुए कार्य के लिए, जितने अधिक व्यक्ति कार्य पर लगाए जाएँगे, उतना ही उस कार्य को पूरा करने में कम समय लगेगा।

ध्यान दीजिए कि एक राशि में परिवर्तन से दूसरी राशि में परिवर्तन हो रहा है। ऐसी पाँच और स्थितियाँ लिखिए, जहाँ एक राशि में परिवर्तन होने से दूसरी राशि में भी परिवर्तन होता है।

मोहन द्वारा आवश्यक प्रत्येक वस्तु की मात्रा हम किस प्रकार ज्ञात करते हैं? या पाँच विद्यार्थियों द्वारा कार्य पूरा करने में लिए गए समय को हम किस प्रकार ज्ञात करेंगे? इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर देने के लिए, हम अब कुछ विचरण (variation) की अवधारणाओं का अध्ययन करेंगे।

11.2 सीधा समानुपात

यदि 1kg चीनी का मूल्य ₹ 18 है, तो 3kg चीनी का मूल्य क्या होगा? यह ₹ 54 है। इसी प्रकार, हम 5kg या 8kg चीनी का मूल्य ज्ञात कर सकते हैं।

© NCERT not to be republished

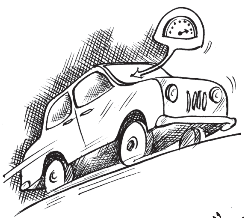
निम्नलिखित सारणी का अध्ययन कीजिए :

चीनी का भार (kg में)	1	3	5	6	8	10
मूल्य (रुपयों में)	36	108	180	...	...	...

(×3, ×5, ×6, ×8, ×10)

ध्यान दीजिए कि जैसे-जैसे चीनी के भार में वृद्धि होती है, वैसे-वैसे उसके मूल्य में भी इस प्रकार से वृद्धि होती है कि इनका अनुपात (ratio) अचर रहता है।

एक और उदाहरण लीजिए। मान लीजिए एक कार 60 km की दूरी तय करने में 4 लीटर पेट्रोल का उपयोग करती है तो वह 12 लीटर पेट्रोल में कितनी दूरी तय करेगी? इसका उत्तर 180 km है। हमने इसे कैसे परिकलित किया? क्योंकि दूसरी स्थिति में 12 लीटर, अर्थात् 4 लीटर का तीन गुना पेट्रोल प्रयोग होता है, इसलिए तय की गई दूरी भी 60 km की तीन गुना होगी। दूसरे शब्दों में, जब पेट्रोल की खपत तीन गुना होगी, तो तय की गई दूरी भी पहली दूरी की तीन गुना होगी। मान लीजिए कि पेट्रोल की खपत x लीटर है तथा तय की गई संगत दूरी y km है। अब निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :



पेट्रोल (x) लीटर में	4	8	12	15	20	25
दूरी (y) km में	60	...	180	...	...	...

हम पाते हैं कि जब x के मान में वृद्धि होती है, तब y के मान में भी इस प्रकार वृद्धि होती है कि अनुपात $\frac{x}{y}$ में कोई बदलाव नहीं आता है। यह अचर (मान लीजिए k) रहता है। इस स्थिति में, यह $\frac{1}{15}$ है, (इसकी जाँच कीजिए)।

यदि $\frac{x}{y} = k$ या $x = ky$ हो, तो हम कहते हैं कि **x और y में सीधा या प्रत्यक्ष समानुपात (direct proportion)** है [अथवा वे **अनुक्रमानुपाती (directly proportional)** हैं]। इस उदाहरण में, $\frac{4}{60} = \frac{12}{180}$ है, जहाँ 4 और 12 पेट्रोल की खपत की लीटर में मात्राएँ (x) हैं तथा 60 और 180 km में दूरियाँ (y) हैं। अत:, जब x और y में **प्रत्यक्ष** या **सीधा अनुपात** होता है, तो हम $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ लिख सकते हैं। [x के मानों x_1, x_2 के लिए y के संगत मान क्रमश: y_1, y_2 हैं।)

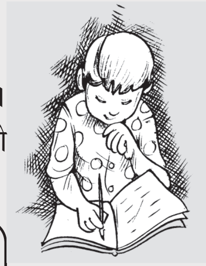
पेट्रोल की खपत और एक कार द्वारा तय की गई दूरी एक प्रत्यक्ष अनुपात की स्थिति है। इसी प्रकार, व्यय की गई कुल धनराशि और खरीदी गई वस्तुओं की संख्या भी प्रत्यक्ष अनुपात का एक उदाहरण है।

प्रत्यक्ष अनुपात के कुछ और उदाहरणों के बारे में सोचिए। जाँच कीजिए कि क्या मोहन (प्रारंभिक उदाहरण में) पाँच व्यक्तियों के लिए चाय बनाने के लिए 750 mL पानी, 5 चम्मच चीनी,

© NCERT not to be republished

$2\frac{1}{2}$ चम्मच चायपत्ती, 125 mL दूध का प्रयोग करेगा। आइए, निम्नलिखित क्रियाकलापों की सहायता से प्रत्यक्ष अनुपात की अवधारणा को और अधिक समझने का प्रयत्न करें।

इन्हें कीजिए

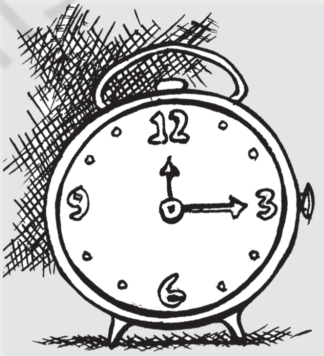


(i) • एक घड़ी लीजिए और उसकी मिनट वाली (बड़ी) सुई को 12 पर स्थिर कीजिए।

• मिनट की सुई द्वारा अपनी प्रारंभिक स्थिति से घूमे गए कोणों एवं बीते हुए समय को निम्नलिखित सारणी के रूप में लिखिए :

व्यतीत हुआ समय (T) (मिनटों में)	(T_1) 15	(T_2) 30	(T_3) 45	(T_4) 60
घूमा गया कोण (A) (डिग्री में)	(A_1) 90	(A_2) ...	(A_3) ...	(A_4) ...
$\frac{T}{A}$	...	...	...	...

आप T और A के बारे में क्या देखते हैं? क्या इनमें साथ-साथ वृद्धि होती है? क्या $\frac{T}{A}$ प्रत्येक समय वही रहता है?



क्या मिनट की सुई द्वारा घूमा गया कोण व्यतीत हुए समय के अनुक्रमानुपाती (directly proportional) है? हाँ!

उपरोक्त सारणी से, आप यह भी देख सकते हैं कि

$T_1 : T_2 = A_1 : A_2$, क्योंकि

$T_1 : T_2 = 15 : 30 = 1:2$

$A_1 : A_2 = 90 : 180 = 1:2$

जाँच कीजिए कि क्या $T_2 : T_3 = A_2 : A_3$ तथा $T_3 : T_4 = A_3 : A_4$ है।

आप स्वयं अपने समय अंतराल लेकर, इस क्रियाकलाप को दोहरा सकते हैं।

(ii) अपने मित्र से निम्नलिखित सारणी को भरने के लिए कहिए तथा उसकी आयु और उसकी माँ की संगत आयु का अनुपात ज्ञात करने के लिए भी कहिए।

	पाँच वर्ष पहले की आयु	**वर्तमान आयु**	**पाँच वर्ष के बाद की आयु**
मित्र की आयु (F)			
माँ की आयु (M)			
$\frac{F}{M}$			

आप क्या देखते हैं? क्या F और M में साथ-साथ वृद्धि (या कमी) होती है? क्या $\frac{F}{M}$ प्रत्येक बार वही है? नहीं। आप इस क्रियाकलाप को अपने अन्य मित्रों के साथ दोहरा सकते हैं तथा अपने प्रेक्षणों को लिख सकते हैं।

© NCERT not to be republished

इस प्रकार, यह आवश्यक नहीं है कि साथ-साथ बढ़ने (या घटने) वाले चर सदैव अनुक्रमानुपाती हों। उदाहरणार्थ :

(i) मानवों में भौतिक परिवर्तन समय के साथ होते रहते हैं, परंतु आवश्यक नहीं है कि ये एक पूर्व निर्धारित अनुपात में हों।

(ii) व्यक्तियों के भार और लंबाई में परिवर्तन किसी ज्ञात अनुपात में नहीं होते हैं।

(iii) किसी पेड़ की ऊँचाई और उसकी शाखाओं पर उगने वाली पत्तियों की संख्या में सीधा संबंध या अनुपात नहीं होता है।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित सारणियों को देखिए तथा ज्ञात कीजिए कि क्या x और y अनुक्रमानुपाती हैं।

(i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

x	5	8	12	15	18	20
y	15	24	36	60	72	100

2. मूलधन = 1000 रुपये, ब्याज दर = 8% वार्षिक। निम्नलिखित सारणी को भरिए तथा ज्ञात कीजिए कि, किस प्रकार का ब्याज (साधारण या चक्रवृद्धि) समय अवधि के साथ प्रत्यक्ष अनुपात में बदलता या परिवर्तित होता है।

$\frac{P \times r \times t}{100}$

$P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - P$

समय अवधि	1 वर्ष	2 वर्ष	3 वर्ष
साधारण ब्याज (रु में)			
चक्रवृद्धि ब्याज (रु में)			

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

यदि हम समय अवधि और ब्याज की दर स्थिर रखें, तो साधारण ब्याज मूलधन के साथ प्रत्यक्ष अनुपात में परिवर्तित होता है। क्या ऐसा ही संबंध चक्रवृद्धि ब्याज के लिए भी होगा? क्यों?

आइए, अब कुछ उदाहरण हल करें, जहाँ हम प्रत्यक्ष अनुपात की अवधारणा का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 1 : एक विशेष प्रकार के 5 मीटर कपड़े का मूल्य 210 रुपये है। इसी प्रकार के 2, 4, 10 और 13 मीटर कपड़े के मूल्यों के लिए एक सारणी बनाइए।

हल : मान लीजिए कि कपड़े की लंबाई x मीटर है तथा उसका मूल्य (रुपयों में) y है।

x	2	4	5	10	13
y	y_2	y_3	210	y_4	y_5

© NCERT not to be republished

जैसे-जैसे कपड़े की लंबाई में वृद्धि होती है, उसके मूल्य में भी उसी अनुपात में वृद्धि होती जाती है। अत:, यह एक प्रत्यक्ष अनुपात की स्थिति है।

हम $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ के प्रकार के संबंध का उपयोग करते हैं।

(i) यहाँ $x_1 = 5$, $y_1 = 210$ और $x_2 = 2$ है।

अत:, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ से हमें $\frac{5}{210} = \frac{2}{y_2}$ प्राप्त होता है।

अर्थात्, $5y_2 = 2 \times 210$ या $y_2 = \frac{2 \times 210}{5} = 84$

(ii) यदि $x_3 = 4$, तो $\frac{5}{210} = \frac{4}{y_3}$ या $5y_3 = 4 \times 210$ या $y_3 = \frac{4 \times 210}{5} = 168$

[क्या हम यहाँ $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ का उपयोग कर सकते हैं? प्रयास कीजिए।]

(iii) यदि $x_4 = 10$, तो $\frac{5}{210} = \frac{10}{y_4}$ या $5 \times y_4 = 10 \times 210$ या $y_4 = \frac{10 \times 210}{5} = 420$

(iv) यदि $x_5 = 13$, तो $\frac{5}{210} = \frac{13}{y_5}$ या $5 \times y_5 = 13 \times 210$ या $y_5 = \frac{13 \times 210}{5} = 546$

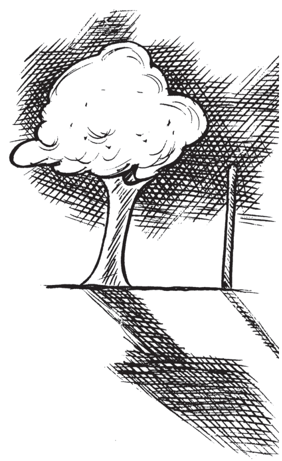
[ध्यान दीजिए कि यहाँ हम $\frac{5}{210}$ के स्थान पर $\frac{2}{84}$ या $\frac{4}{168}$ या $\frac{10}{420}$ का भी उपयोग कर सकते हैं।]

उदाहरण 2 : 14 मीटर ऊँचे एक बिजली के खंभे की छाया 10 मीटर है। समान स्थितियों में उस पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी छाया 15 मीटर है।

हल : मान लीजिए कि पेड़ की ऊँचाई x मीटर है। हम नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी बनाते हैं :

वस्तु की ऊँचाई (मीटर में)	14	x
छाया की लंबाई (मीटर में)	10	15

ध्यान दीजिए कि वस्तु की ऊँचाई जितनी अधिक होगी, उसकी छाया की लंबाई उतनी ही अधिक होगी। अत:, यह एक प्रत्यक्ष अनुपात की स्थिति है।



अर्थात्, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ से हमें प्राप्त होता है : $\frac{14}{10} = \frac{x}{15}$ (क्यों?)

या $\frac{14 \times 15}{10} = x$ या $\frac{14 \times 3}{2} = x$

अत: $x = 21$। इस प्रकार पेड़ की ऊँचाई 21 मीटर है।

वैकल्पिक रूप से, हम $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ को $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ के रूप में लिख सकते हैं।

अत: $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ या $14 : x = 10 : 15$

अत: $10 \times x = 15 \times 14$ या $x = \frac{15 \times 14}{10} = 21$

© NCERT not to be republished

उदाहरण 3 : यदि मोटे कागज़ की 12 शीटों (sheets) का भार 40 ग्राम है, तो ऐसे ही कागज़ की कितनी शीटों का भार $2\frac{1}{2}$ किलोग्राम होगा?

हल : मान लीजिए कि उन शीटों की संख्या x है जिनका भार $2\frac{1}{2}$ किलोग्राम है। हम उपरोक्त सूचना को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखते हैं :

शीटों की संख्या	12	x
शीटों का भार (ग्राम में)	40	2500

1 किलोग्राम = 1000 ग्राम
$2\frac{1}{2}$ किलोग्राम = 2500 ग्राम

शीटों की संख्या अधिक होगी, तो उनका भार भी उतना ही अधिक होगा। अत: शीटों की संख्या और उनके भार परस्पर अनुक्रमानुपाती हैं।

अत: $\frac{12}{40} = \frac{x}{2500}$

या $\frac{12 \times 2500}{40} = x$ या $750 = x$

अत: कागज़ की शीटों की वांछित संख्या 750 है।

वैकल्पिक विधि : दो राशियाँ x और y जो प्रत्यक्ष अनुपात में विचरण (vary) करती हैं में

$x = ky$ या $\frac{x}{y} = k$ का संबंध होता है।

यहाँ $k = \frac{\text{शीटों की संख्या}}{\text{ग्रामों में शीटों का भार}} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$ । अब x उन कागज़ की शीटों की संख्या है जिनका भार $2\frac{1}{2}$ kg (2500 gm) है। संबंध $x = ky$ का उपयोग करने पर, $x = \frac{3}{10} \times 2500 = 750$

इस प्रकार, कागज़ की 750 शीटों का भार $2\frac{1}{2}$ किलोग्राम होगा।

उदाहरण 4 : एक रेलगाड़ी 75 km/h की एकसमान (uniform) चाल से चल रही है।

(i) वह 20 मिनट में कितनी दूरी तय करेगी?

(ii) 250 km की दूरी तय करने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि 20 मिनट में तय की गई दूरी (km में) x है तथा 250 km की दूरी तय करने में लगने वाला समय (मिनटों में) y है।

1 घंटा = 60 मिनट

तय की गई दूरी (km में)	75	x	250
लिया गया समय (मिनटों में)	60	20	y

क्योंकि चाल एकसमान है, इसलिए तय की गई दूरी लिए गए समय के अनुक्रमानुपाती होगी।

© NCERT not to be republished

(i) हमें प्राप्त है : $\frac{75}{60} = \frac{x}{20}$ या $\frac{75 \times 20}{60} = x$

या $x = 25$ । अतः रेलगाड़ी 20 मिनट में 25 km की दूरी तय करेगी।

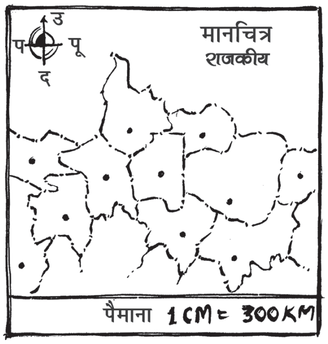
(ii) साथ ही, $\frac{75}{60} = \frac{250}{y}$

या $y = \frac{250 \times 60}{75} = 200$ मिनट, अर्थात् 3 घंटे 20 मिनट

अतः 250 km की दूरी तय करने के लिए 3 घंटे 20 मिनट का समय लगेगा।

वैकल्पिक रूप से, जब x ज्ञात है, तो संबंध $\frac{x}{20} = \frac{250}{y}$ से y को ज्ञात किया जा सकता है।

> आप जानते हैं कि एक मानचित्र (map) एक बहुत बड़े क्षेत्र का लघु निरूपण होता है। प्रायः मानचित्र के सबसे नीचे वाले भाग में एक पैमाना (scale) दिया रहता है। यह पैमाना वास्तविक लंबाई और मानचित्र पर निरूपित लंबाई में संबंध दर्शाता है। इस प्रकार, मानचित्र का पैमाना मानचित्र पर दो बिंदुओं की दूरी और बड़े क्षेत्र पर दोनों बिंदुओं की वास्तविक दूरी का अनुपात होता है।
>
> उदाहरणार्थ, यदि मानचित्र पर 1 cm वास्तविक दूरी 8 km निरूपित करता है (अर्थात् पैमाना 1 cm : 8 km या 1 : 800000 है), तो उसी मानचित्र पर 2 cm वास्तविक दूरी 16 km निरूपित करता है। अतः, हम कह सकते हैं कि मानचित्र का पैमाना प्रत्यक्ष अनुपात की अवधारणा पर आधारित है।



उदाहरण 5 : एक मानचित्र का पैमाना 1 : 30000000 दिया है। दो नगर मानचित्र में 4 cm की दूरी पर हैं। उनके बीच की वास्तविक दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि मानचित्र दूरी x cm है तथा वास्तविक दूरी y cm है।

तब, $1 : 30000000 = x : y$ या $\frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{x}{y}$

क्योंकि $x = 4$ है, इसलिए $\frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{4}{y}$

अथवा $y = 4 \times 3 \times 10^7 = 12 \times 10^7$ cm = 120 km

इस प्रकार, मानचित्र पर 4 cm की दूरी वाले नगरों की वास्तविक दूरी 1200 km है।

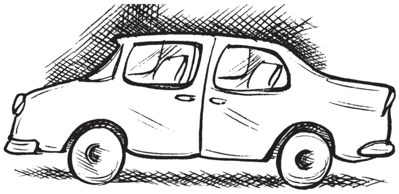
इन्हें कीजिए

अपने राज्य का एक मानचित्र लीजिए। वहाँ पर प्रयुक्त पैमाने को लिख लीजिए। पैमाने (ruler) का प्रयोग करते हुए, मानचित्र पर किन्हीं दो नगरों की दूरी मापिए। इन दोनों नगरों के बीच की वास्तविक दूरी परिकलित कीजिए।

प्रश्नावली 11.1

1. एक रेलवे स्टेशन के निकट कार पार्किंग शुल्क इस प्रकार हैं–

4 घंटों तक	₹ 60
8 घंटों तक	₹ 100
12 घंटों तक	₹ 140
24 घंटों तक	₹ 180



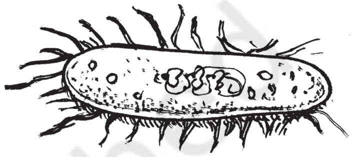
जाँच कीजिए कि क्या कार पार्किंग शुल्क पार्किंग समय के प्रत्यक्ष अनुपात में है।

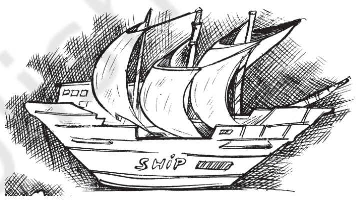
© NCERT not to be republished

2. एक पेंट के मूल मिश्रण (base) के 8 भागों में लाल रंग के पदार्थ का 1 भाग मिलाकर मिश्रण तैयार किया जाता है। निम्नलिखित सारणी में, मूल मिश्रण के वे भाग ज्ञात कीजिए जिन्हें मिलाए जाने की आवश्यकता है :

लाल रंग के पदार्थ के भाग	1	4	7	12	20
मूल मिश्रण के भाग	8	...	...	...	...

3. प्रश्न 2 में यदि लाल रंग के पदार्थ के 1 भाग के लिए 75 mL मूल मिश्रण की आवश्यकता है, तो मूल मिश्रण के 1800 mL में हमें कितना लाल रंग का पदार्थ मिलाना चाहिए?
4. किसी सॉफ्ट ड्रिंक फैक्ट्री में एक मशीन 840 बोतलें 6 घंटे में भरती है। वह मशीन पाँच घंटे में कितनी बोतलें भरेगी?
5. एक बैक्टीरिया (bacteria) या जीवाणु के फोटोग्राफ (चित्र) को 50,000 गुना आवर्धित करने पर उसकी लंबाई 5 cm हो जाती है, जैसा कि संलग्न चित्र में दिखाया गया है। इस बैक्टीरिया की वास्तविक लंबाई क्या है? यदि फोटोग्राफ को केवल 20,000 गुना आवर्धित किया जाए, तो उसकी आवर्धित लंबाई क्या होगी?





6. एक जहाज के मॉडल में, उसका मस्तूल (mast) 9 cm ऊँचा है, जबकि वास्तविक जहाज का मस्तूल 12 m ऊँचा है। यदि जहाज की लंबाई 28 m है, तो उसके मॉडल की लंबाई कितनी है?
7. मान लीजिए 2 kg चीनी में 9×10^6 क्रिस्टल हैं। निम्नलिखित चीनी में कितने चीनी के क्रिस्टल होंगे? (i) 5 kg (ii) 1.2 kg
8. रश्मि के पास एक सड़क का मानचित्र है, जिसके पैमाने में 1 cm की दूरी 18 km निरूपित करती है। वह उस सड़क पर अपनी गाड़ी से 72 km की दूरी तय करती है। उसके द्वारा तय की गई दूरी मानचित्र में क्या होगी?
9. एक 5 m 60 cm ऊँचे ऊर्ध्वाधर खंभे की छाया की लंबाई 3 m 20 cm है। उसी समय पर ज्ञात कीजिए–
   (i) 10 m 50 cm ऊँचे एक अन्य खंभे की छाया की लंबाई
   (ii) उस खंभे की ऊँचाई जिसके छाया की लंबाई 5*m* है।
10. माल से लदा हुआ एक ट्रक 25 मिनट में 14 km चलता है। यदि चाल वही रहे, तो वह 5 घंटे में कितनी दूरी तय कर पाएगा?

इन्हें कीजिए

1. एक वर्गांकित कागज़ पर भिन्न-भिन्न भुजाओं के पाँच वर्ग खींचिए। निम्नलिखित सूचना को एक सारणी के रूप में लिखिए :

	वर्ग-1	**वर्ग-2**	**वर्ग-3**	**वर्ग-4**	**वर्ग-5**
एक भुजा की लंबाई (L)					
परिमाप (P)					
$\frac{L}{P}$					

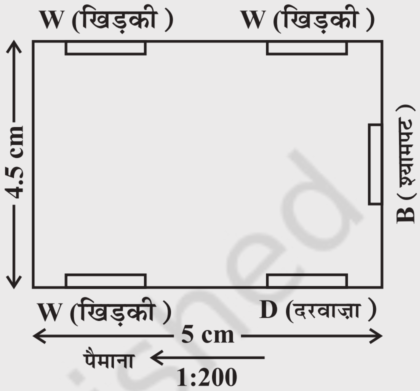
क्षेत्रफल (A)					
$\frac{L}{A}$					

ज्ञात कीजिए कि क्या भुजा की लंबाई

(a) वर्ग के परिमाप के अनुक्रमानुपाती है। (b) वर्ग के क्षेत्रफल के अनुक्रमानुपाती है।

2. पाँच व्यक्तियों के लिए हलवा बनाने के लिए, निम्नलिखित सामग्री की आवश्यकता होती है : सूजी / रवा = 250 g, चीनी = 300 g, घी = 200 g, पानी = 200 g
समानुपात की अवधारणा का प्रयोग करते हुए, अपनी कक्षा के लिए हलवा बनाने के लिए, इन सामग्रियों की मात्राओं में होने वाले परिवर्तनों का आकलन (estimate) कीजिए।

3. एक पैमाने का चुनाव करते हुए, अपनी कक्षा के कमरे का मानचित्र खींचिए, जिसमें खिड़कियाँ, दरवाजे, ब्लैकबोर्ड इत्यादि दर्शाए गए हों। (एक उदाहरण यहाँ दिया गया है।)



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

'सीधा समानुपात (विचरण)' की अब तक हल की गई समस्याओं में से कुछ को लीजिए। क्या आप सोचते हैं कि इन समस्याओं को इकाई की विधि या ऐकिक विधि (unitary method) से हल किया जा सकता है?

11.3 प्रतिलोम अनुपात

दो राशियाँ इस प्रकार भी परिवर्तित (बदल) हो सकती हैं कि यदि एक राशि में वृद्धि होती है, तो दूसरी राशि में कमी होती है तथा एक में कमी होने पर दूसरी में वृद्धि होती है। उदाहरणार्थ, जब किसी काम पर अधिक व्यक्ति लगाए जाते हैं, तो वह काम कम समय में पूरा हो जाता है। इसी प्रकार, यदि चाल बढ़ा दी जाए, तो एक निश्चित दूरी तय करने में कम समय लगता है। इसको समझने के लिए, आइए निम्नलिखित स्थिति को देखें :

ज़ाहिदा अपने स्कूल चार विभिन्न प्रकारों से जा सकती है। वह पैदल जा सकती है, दौड़ कर जा सकती है, साइकिल पर जा सकती है और कार में जा सकती है। संलग्न सारणी का अध्ययन कीजिए :

×15
×3
×2

	पैदल चलकर	दौड़कर	साइकिल पर	कार द्वारा
चाल (km/hour में)	3	6	9	45
लिया गया समय (मिनटों में)	30	15	10	2

$\times\frac{1}{2}$
$\times\frac{1}{3}$
$\times\frac{1}{15}$

ध्यान दीजिए कि जब चाल में वृद्धि होती है, तो समान दूरी को तय करने में लगने वाले समय में कमी होती है। जब ज़ाहिदा दौड़कर अपनी चाल दुगुनी करती है, तो उसके द्वारा लिया गया समय $\frac{1}{2}$ हो जाता है।

© NCERT not to be republished

जब वह अपनी चाल साइकिल पर तीन गुना करती है, तो उसके द्वारा लिया गया समय $\frac{1}{3}$ रह जाता है। इसी प्रकार, जब वह अपनी चाल 15 गुनी करती है, तो उसके द्वारा लिया गया समय $\frac{1}{15}$ रह जाता है। अर्थात् समय में होने वाली कमी का अनुपात चाल में होने वाली संगत वृद्धि के अनुपात का प्रतिलोम (inverse) होता है। क्या हम कह सकते हैं कि गति और समय व्युत्क्रमानुपात में परिवर्तित होते हैं।

किसी संख्या का गुणनात्मक प्रतिलोम (inverse) उसका व्युत्क्रम (reciprocal) होता है। इस प्रकार, $\frac{1}{2}$, 2 का प्रतिलोम है। (ध्यान दीजिए कि $2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ है।)

आइए, एक अन्य उदाहरण पर विचार करें। एक विद्यालय गणित की पाठ्यपुस्तकों के लिए 6000 रुपये खर्च करना चाहता है। 40 रुपये प्रति पुस्तक की दर से कितनी पुस्तकें खरीदी जा सकती हैं? स्पष्ट है कि 150 पुस्तकें खरीदी जा सकती हैं। यदि एक पाठ्यपुस्तक का मूल्य 40 रुपये से अधिक हो, तो उसी निश्चित राशि में 150 से कम पुस्तकें खरीदी जाएँगी। निम्नलिखित सारणी को देखिए :

प्रत्येक पुस्तक का मूल्य (₹ में)	40	50	60	75	80	100
खरीदी जा सकने वाली पुस्तकों की संख्या	150	120	100	80	75	60

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि यदि प्रत्येक पुस्तक के मूल्य में वृद्धि होती है, तो एक निश्चित फंड (राशि) में खरीदी जा सकने वाली पुस्तकों की संख्या में कमी हो जाएगी।

जब पुस्तक का मूल्य 40 रुपये से 50 रुपये होता है, तो इसकी वृद्धि का अनुपात 4:5 है तथा संगत पुस्तकों की संख्या 150 से कम होकर 120 होने पर अनुपात 5:4 है। इसका अर्थ है कि दोनों अनुपात एक–दूसरे के प्रतिलोम (inverse) हैं।

ध्यान दीजिए कि दोनों राशियों के संगत मानों का गुणनफल अचर अर्थात्

$$40 \times 150 = 50 \times 120 = 6000 \text{ है।}$$

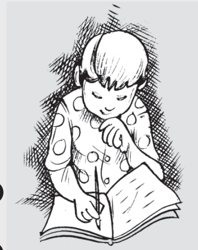
यदि हम प्रत्येक पुस्तक के मूल्य (रु. में) को x तथा खरीदी गई पुस्तकों की संख्याओं को y से निरूपित करें, तो जब x में वृद्धि होती है, तब y में कमी होती है और विलोमत: यह ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि गुणनफल xy अचर रहता है। हम कहते हैं कि x, y के साथ प्रतिलोम रूप से विचरण (varies inversely) करता है तथा y, x के साथ प्रतिलोम रूप से विचरण करता है। इस प्रकार, दो राशियाँ x और y प्रतिलोम समानुपात में विचरित कही जाती हैं, यदि उनके बीच में $xy = k$ के प्रकार का कोई संबंध हो, जहाँ k कोई अचर है। यदि x के मानों x_1, x_2 के लिए y के संगतमान क्रमशः y_1, y_2 हों, तो $x_1y_1 = x_2y_2 (= k)$, अर्थात् $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ होता है।

हम कहते हैं कि x और y **प्रतिलोम अनुपात (inverse proportion)** में हैं।

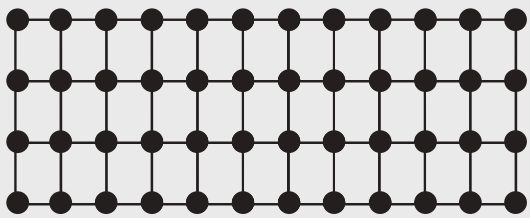
अत:, उपरोक्त उदाहरण में, एक पुस्तक का मूल्य और एक निश्चित धनराशि में खरीदी जाने वाली पुस्तकों की संख्या व्युत्क्रमानुपाती हैं। इसी प्रकार, एक वाहन की चाल और उसके द्वारा एक निश्चित दूरी तय करने में लिया गया समय परस्पर प्रतिलोम अनुपात में बदलते हैं। इसी प्रकार की कुछ अन्य राशियों के युग्मों के उदाहरणों के बारे में सोचिए जो प्रतिलोम अनुपात में बदलती (विचरित होती) हैं। अब आप फर्नीचर को व्यवस्थित करने की उस समस्या पर ध्यान दे सकते

हैं, जो हमने इस अध्याय की भूमिका में वर्णित की थी। प्रतिलोम समानुपात को और अच्छी प्रकार से समझने के लिए एक क्रियाकलाप यहाँ दिया जा रहा है।

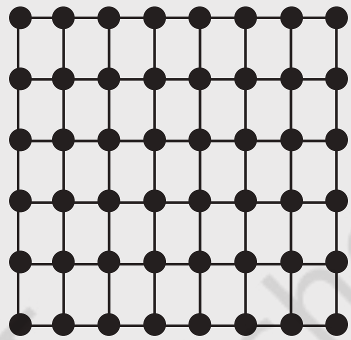
इन्हें कीजिए



एक वर्गांकित कागज़ लीजिए और उस पर 48 काउंटरों (counters) को पंक्तियों की विभिन्न संख्याओं में नीचे दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए :



4 पंक्तियाँ, 12 स्तंभ



6 पंक्तियाँ, 8 स्तंभ

पंक्तियों की संख्या (R)	(R_1) 2	(R_2) 3	(R_3) 4	(R_4) 6	(R_5) 8
स्तंभों की संख्या (C)	(C_1) ...	(C_2) ...	(C_3) 12	(C_4) 8	(C_5) ...

आप क्या देखते हैं? जब R में वृद्धि होती है, तो C में कमी होती है।

(i) क्या $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$ है? (ii) क्या $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$ है?

(iii) क्या R और C परस्पर व्युत्क्रमानुपाती हैं?

इस क्रियाकलाप को 36 काउंटरों के साथ प्रयास कीजिए।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित सारणियों को देखिए तथा ज्ञात कीजिए कि कौन-से चरों (यहाँ x और y) के युग्म परस्पर प्रतिलोम समानुपात में हैं :

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

(iii)

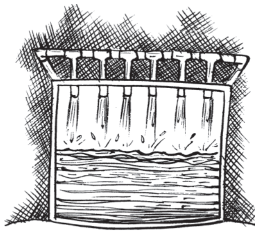
x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35

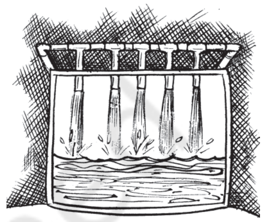
आइए, कुछ ऐसे उदाहरणों पर विचार करें, जहाँ हम प्रतिलोम समानुपात की अवधारणा का प्रयोग करते हैं।

जब दो राशियाँ x और y प्रत्यक्ष या सीधे समानुपात में होती हैं (अर्थात् अनुक्रमानुपाती होती हैं), तो इन्हें $x \alpha y$ भी लिखा जाता है। जब दो राशियाँ x और y प्रतिलोम समानुपात में (अर्थात् व्युत्क्रमानुपाती) होती हैं, तो उन्हें $x \alpha \frac{1}{y}$ भी लिखा जाता है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 7 : एक टंकी को 1 घंटे 20 मिनट में भरने के लिए 6 पाइपों (pipes) की आवश्यकता पड़ती है। यदि उसी प्रकार के केवल 5 पाइपों का ही उपयोग किया जाए, तो वह टंकी कितने समय में भरेगी?





हल : मान लीजिए कि टंकी को भरने का वांछित समय x मिनट है। तब, हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है :

पाइपों की संख्या	6	5
समय (मिनटों में)	80	x

पाइपों की संख्या जितनी कम होगी, टंकी को भरने में उतना ही अधिक समय लगेगा। अतः यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है।

अतः $80 \times 6 = x \times 5 \; (x_1 y_1 = x_2 y_2)$

या $\frac{80 \times 6}{5} = x$ या $x = 96$

इस प्रकार, टंकी को 5 पाइपों द्वारा 96 मिनट, अर्थात् 1 घंटा 36 मिनट में भरा जाएगा।

उदाहरण 8 : एक छात्रावास में 100 विद्यार्थी हैं और उनके भोजन की सामग्री 20 दिन के लिए पर्याप्त है। यदि इस समूह में 25 विद्यार्थी और आ जाएँ, तो यह भोजन सामग्री कितने दिन चलेगी?

हल : मान लीजिए कि भोजन सामग्री 125 विद्यार्थियों के लिए y दिन तक चलेगी। हम निम्नलिखित सारणी प्राप्त करते हैं :

विद्यार्थियों की संख्या	100	125
दिनों की संख्या	20	y

ध्यान दीजिए कि जितने विद्यार्थी अधिक होंगे उतने ही कम समय में भोजन सामग्री समाप्त हो जाएगी। अतः यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है।

इसलिए $100 \times 20 = 125 \times y$

या $\frac{100 \times 20}{125} = y$

या $y = 16$

वैकल्पिक रूप से, हम $x_1 y_1 = x_2 y_2$ को $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ लिख सकते हैं।

अर्थात् $y_1 : x_2 = y_2 : y_1$

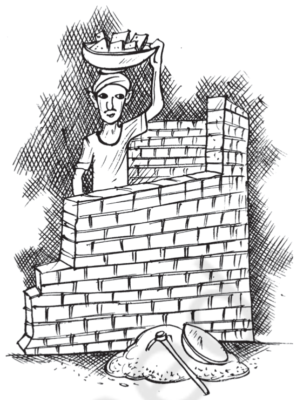
या $100 : 125 = y : 20$

या $y = \frac{100 \times 20}{125} = 16$

© NCERT not to be republished

उदाहरण 9 : यदि 15 श्रमिक किसी दीवार को 48 घंटे में निर्मित कर सकते हैं, तो इसी कार्य को 30 घंटे में पूरा करने के लिए, कितने श्रमिकों की आवश्यकता होगी?

हल : मान लीजिए दीवार को 30 घंटे में निर्मित करने के लिए y श्रमिकों की आवश्यकता है। तब, हम निम्नलिखित सारणी प्राप्त करते हैं :



घंटों की संख्या	48	30
श्रमिकों की संख्या	15	y

स्पष्टत:, अधिक श्रमिक होने पर, दीवार बनने में कम समय लगेगा।
अत: यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है।

इसलिए, $48 \times 15 = 30 \times y$

अत: $\frac{48 \times 15}{30} = y$ या $y = 24$

अर्थात् इस कार्य को 30 घंटे में समाप्त करने के लिए 24 श्रमिकों की आवश्यकता है।

प्रश्नावली 11.2

1. निम्नलिखित में से कौन प्रतिलोम अनुपात में हैं?

(i) किसी कार्य पर लगे व्यक्तियों की संख्या और उस कार्य को पूरा करने में लगा समय।

(ii) एक समान चाल से किसी यात्रा में लिया गया समय और तय दूरी।

(iii) खेती की गई भूमि का क्षेत्रफल और काटी गई फसल।

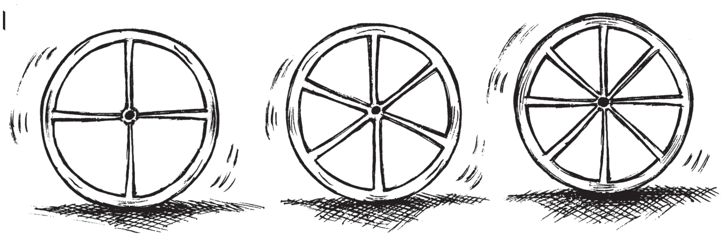
(iv) एक निश्चित यात्रा में लिया गया समय और वाहन की चाल।

(v) किसी देश की जनसंख्या और प्रति व्यक्ति भूमि का क्षेत्रफल।

2. एक टेलीविज़न गेम शो (game show) में, ₹ 1,00,000 की पुरस्कार राशि विजेताओं में समान रूप से वितरित की जानी है। निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए तथा ज्ञात कीजिए कि क्या एक व्यक्तिगत विजेता को दी जाने वाली पुरस्कार की धनराशि विजेताओं की संख्या के अनुक्रमानुपाती है या व्युत्क्रमानुपाती है।

विजेताओं की संख्या	1	2	4	5	8	10	20
प्रत्येक विजेता का पुरस्कार (₹ में)	1,00,000	50,000	...	...	...	...	...

3. रहमान तीलियों या डंडियों का प्रयोग करते हुए, एक पहिया बना रहा है। वह समान तीलियाँ इस प्रकार लगाना चाहता है कि किन्हीं भी क्रमागत तीलियों के युग्मों के बीच के कोण बराबर हैं।



© NCERT not to be republished

निम्नलिखित सारणी को पूरा करके, उसकी सहायता कीजिए :

तीलियों की संख्या	4	6	8	10	12
क्रमागत तीलियों के एक युग्म के बीच का कोण	90°	60°	...	...	...

(i) क्या तीलियों की संख्या और क्रमागत तीलियों के किसी युग्म के बीच का कोण प्रतिलोम समानुपात में है?

(ii) 15 तीलियों वाले एक पहिए के क्रमागत तीलियों के किसी युग्म का कोण परिकलित कीजिए।

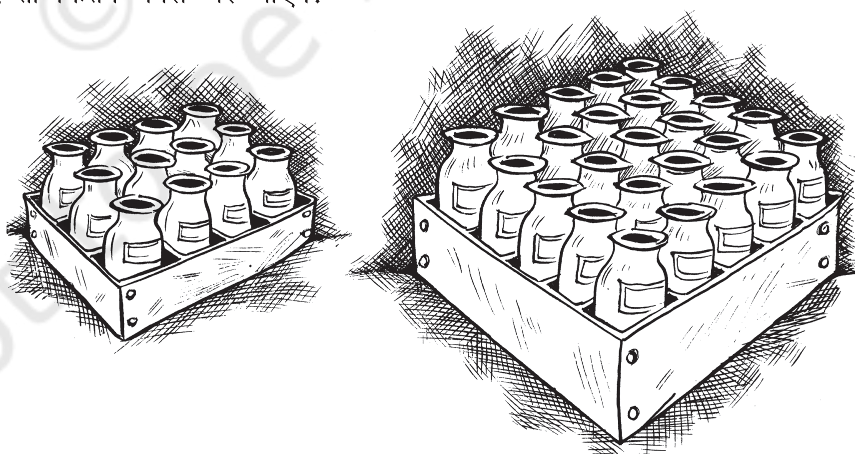
(iii) यदि क्रमागत तीलियों के प्रत्येक युग्म के बीच का कोण 40° है, तो आवश्यक तीलियों की संख्या कितनी होगी?

4. यदि किसी डिब्बे की मिठाई को 24 बच्चों में बाँटा जाए, तो प्रत्येक बच्चे को 5 मिठाइयाँ मिलती हैं। यदि बच्चों की संख्या में 4 की कमी हो जाए, तो प्रत्येक बच्चे को कितनी मिठाइयाँ मिलेंगी?

5. एक किसान की पशुशाला में 20 पशुओं के लिए 6 दिन का पर्याप्त भोजन है। यदि इस पशुशाला में 10 पशु और आ जाएँ, तो यह भोजन कितने दिन तक पर्याप्त रहेगा?

6. एक ठेकेदार यह आकलन करता है कि जसमिंदर के घर में पुन: तार लगाने का कार्य 3 व्यक्ति 4 दिन में कर सकते हैं। यदि वह तीन के स्थान पर चार व्यक्तियों को इस काम पर लगाता है, तो यह कार्य कितने दिन में पूरा हो जाएगा?

7. बोतलों के एक बैच (batch) को 25 बक्सों में रखा जाता है, जबकि प्रत्येक बक्स में 12 बोतलें हैं। यदि इसी बैच की बोतलों को इस प्रकार रखा जाए कि प्रत्येक बक्स में 20 बोतलें हों, तो कितने बक्स भरे जाएँगे?



8. एक फैक्ट्री को कुछ वस्तुएँ 63 दिन में बनाने के लिए 42 मशीनों की आवश्यकता होती है। उतनी ही वस्तुएँ 54 दिन में बनाने के लिए, कितनी मशीनों की आवश्यकता होगी?

9. एक कार एक स्थान तक पहुँचने में 60 km/h की चाल से चलकर 2 घंटे का समय लेती है। 80 km/h की चाल से उस कार को कितना समय लगेगा?

10. दो व्यक्ति एक घर में नई खिड़कियाँ 3 दिन में लगा सकते हैं।

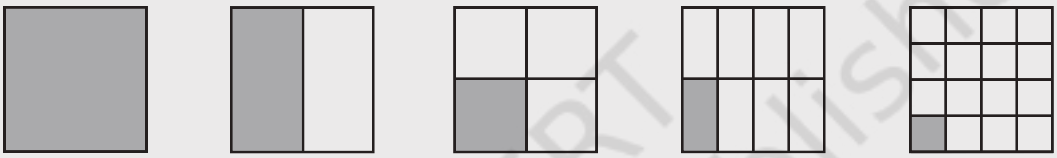
(i) कार्य प्रारंभ होने से पहले, एक व्यक्ति बीमार पड़ जाता है। अब यह कार्य कितने दिन में पूरा हो पाएगा?

(ii) एक ही दिन में खिड़कियाँ लगवाने के लिए, कितने व्यक्तियों की आवश्यकता होगी?

11. किसी स्कूल में, 45 मिनट अवधि के 8 कालांश होते हैं। यह कल्पना करते हुए कि स्कूल का कार्य समय उतना ही रहता है, यदि स्कूल में बराबर अवधि के 9 कालांश हों, तो प्रत्येक कालांश कितने समय का होगा?

इन्हें कीजिए

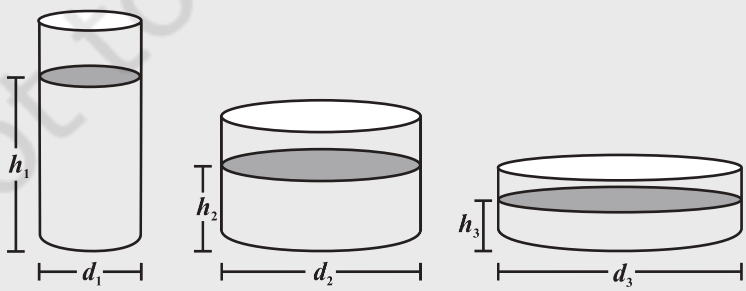
1. एक कागज़ की शीट लीजिए। इसे आकृति में दर्शाए अनुसार मोड़िए। प्रत्येक स्थिति में, भागों की संख्या तथा एक भाग का क्षेत्रफल लिखिए।



अपने प्रेक्षणों की सारणी बनाइए और उसकी अपने मित्रों से चर्चा कीजिए। क्या यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है? क्यों?

भागों की संख्या	1	2	4	8	16
प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल	कागज़ का क्षेत्रफल	कागज़ के क्षेत्रफल का $\frac{1}{2}$	...	...	...

2. वृत्तीय आधार वाले विभिन्न मापों के कुछ बर्तन लीजिए। प्रत्येक बर्तन में पानी की समान मात्रा भरिए। प्रत्येक बर्तन का व्यास और उस बर्तन में पानी किस ऊँचाई तक है उसे माप कर लिखिए। अपने प्रेक्षणों की एक सारणी बनाइए। क्या यह एक प्रतिलोम समानुपात की स्थिति है?



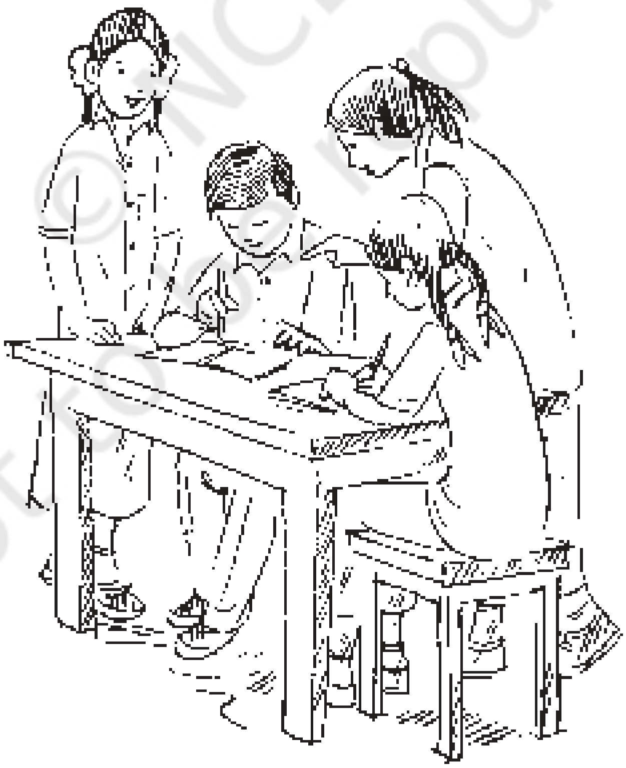
बरतन का व्यास (cm में)			
पानी के स्तर की ऊँचाई (cm में)			

© NCERT not to be republished

हमने क्या चर्चा की?

1. दो राशियाँ x और y प्रत्यक्ष या **सीधे समानुपात** में अथवा **परस्पर अनुक्रमानुपाती** कही जाती हैं, यदि वे साथ-साथ इस प्रकार बढ़ती (घटती) हैं कि उनके संगत मानों का अनुपात अचर रहता है। अर्थात्, यदि $\frac{x}{y}=k$ हो (जहाँ k एक धनात्मक अचर है), तो x और y परस्पर अनुक्रमानुपाती कहलाती हैं। इस प्रकार की स्थिति में, यदि x के मानों x_1, x_2 के लिए y के संगत मान क्रमशः y_1, y_2 हों तो $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ होता है।

2. दो राशियाँ x और y **प्रतिलोम समानुपात** में अथवा **परस्पर व्युत्क्रमानुपाती** कही जाती हैं, यदि x में हुई एक वृद्धि y में एक समानुपाती कमी उत्पन्न करे तथा x में हुई एक कमी y में एक समानुपाती वृद्धि उत्पन्न करे ताकि इनके संगत मानों का गुणनफल अचर रहे। अर्थात् यदि $xy = k$ हो, तो x और y परस्पर व्युत्क्रमानुपाती कहलाती हैं। इस स्थिति में, यदि x के मानों x_1, x_2 के लिए y के संगत मान क्रमशः y_1, y_2 हों, तो $x_1y_1 = x_2y_2$ या $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$ होता है।



© NCERT not to be republished

अध्याय

12

गुणनखंडन

0853CH14

12.1 भूमिका

12.1.1 प्राकृत संख्याओं के गुणनखंड

आपको याद होगा कि आपने गुणनखंडों (factors) के बारे में कक्षा VI में पढ़ा था। आइए, एक प्राकृत संख्या लेते हैं। मान लीजिए यह संख्या 30 है। हम इसे अन्य प्राकृत संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखते हैं, जैसे

$$30 = 2 \times 15$$
$$= 3 \times 10 = 5 \times 6$$

इस प्रकार 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 और 30 संख्या 30 के गुणनखंड हैं। इनमें से 2, 3 और 5, संख्या 30 के अभाज्य गुणनखंड हैं (क्यों?)। जब कोई संख्या अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखी हो, तो वह उसका अभाज्य गुणनखंड रूप कहलाता है। उदाहरण के लिए 30 को अभाज्य गुणनखंड रूप में $2 \times 3 \times 5$ लिखते हैं।

> हम जानते हैं कि 30 को इस रूप में भी लिखा जा सकता है :
> $30 = 1 \times 30$
> इस प्रकार, 1 और 30 भी 30 के गुणनखंड हैं। आप देखेंगे कि 1 प्रत्येक संख्या का एक गुणनखंड होता है उदाहरणार्थ, $101 = 1 \times 101$ होता है।
> परंतु जब भी हम किसी संख्या को गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखेंगे, तो हम, 1 को गुणनखंड के रूप में तब तक नहीं लिखेंगे। जब तक विशेष रूप से आवश्यक न हो।

70 का अभाज्य गुणनखंड रूप $2 \times 5 \times 7$ है। 90 का अभाज्य गुणनखंड रूप $2 \times 3 \times 3 \times 5$ है, इत्यादि।

इसी प्रकार, हम बीजीय व्यंजकों (algebraic expression) को भी उनके गुणनखंडों के गुणनफलों के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। इसका हम इस अध्याय में अध्ययन करेंगे।

12.1.2 बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड

हम कक्षा VII में देख चुके हैं कि बीजीय व्यंजकों के पद (terms) गुणनखंडों के गुणनफलों के रूप में बनते हैं। उदाहरणार्थ, बीजीय व्यंजक $5xy + 3x$ में, पद $5xy$ गुणनखंडों 5, x और y से बना है, अर्थात्

$$5xy = 5 \times x \times y$$

ध्यान दीजिए कि $5xy$ के गुणनखंड 5, x और y को और आगे गुणनखंडित नहीं किया जा सकता है, अर्थात् उन्हें गुणनखंडों के

> ध्यान दीजिए कि 1 पद $5xy$, का एक गुणनखंड है, क्योंकि
> $$5xy = 1 \times 5 \times x \times y$$
> वास्तव में, 1 प्रत्येक पद का एक गुणनखंड होता है। प्राकृत संख्याओं की स्थिति की ही तरह, जब तक विशेष रूप से आवश्यक न हो, हम 1 को किसी भी पद का अलग से गुणनखंड नहीं लिखते हैं।

© NCERT not to be republished

गुणनफल के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। हम कह सकते हैं कि $5xy$ के अभाज्य गुणनखंड (prime factors) 5, x और y हैं। बीजीय व्यंजकों में, हम 'अभाज्य' के स्थान पर शब्द 'अखंडनीय (irreducible)' का प्रयोग करते हैं। हम कहते हैं कि $5xy$ का अखंडनीय रूप $5 \times x \times y$ है। ध्यान दीजिए कि $5 \times (xy)$ पद $5xy$ का अखंडनीय रूप नहीं है, क्योंकि गुणनखंड xy को और आगे x एवं y के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, अर्थात् $xy = x \times y$ है।

अब, व्यंजक $3x\,(x + 2)$ पर विचार कीजिए। इसे गुणनखंडों 3, x और $(x + 2)$ के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। अर्थात्

$$3x(x + 2) = 3 \times x \times (x + 2)$$

व्यंजक $3x\,(x + 2)$ के अखंडनीय गुणनखंड 3, x और $(x + 2)$ हैं।

इसी प्रकार, व्यंजक $10x\,(x + 2)\,(y + 3)$ को अखंडनीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जाता है :

$$10x\,(x + 2)\,(y + 3) = 2 \times 5 \times x \times (x + 2) \times (y + 3)$$

12.2 गुणनखंडन क्या है?

जब हम किसी बीजीय व्यंजक के गुणनखंड करते हैं, तो हम उसे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। ये गुणनखंड, संख्याएँ, बीजीय चर या बीजीय व्यंजक हो सकते हैं। $3xy$, $5x^2y$, $2x\,(y + 2)$, $5\,(y + 1)\,(x + 2)$ जैसे व्यंजक पहले से ही गुणनखंड रूप में हैं। जैसा कि हम पहले से ही जानते हैं, हम उपरोक्त व्यंजकों के गुणनखंड इन्हें देखकर ही पढ़ सकते हैं।

इसके विपरीत $2x + 4$, $3x + 3y$, $x^2 + 5x$, $x^2 + 5x + 6$ जैसे व्यंजकों पर विचार कीजिए। यह स्पष्ट नहीं है कि इनके गुणनखंड क्या हैं। इस प्रकार के व्यंजकों के गुणनखंड करने के लिए, हमें क्रमबद्ध विधियाँ विकसित करने की आवश्यकता है। यही अब हम करेंगे।

12.2.1 सार्व गुणनखंडों की विधि

- हम एक सरल उदाहरण से प्रारंभ करते हैं : $2x + 4$ के गुणनखंड कीजिए।

  हम इसके प्रत्येक पद को अखंडनीय गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखेंगे :

$$2x = 2 \times x$$
$$4 = 2 \times 2$$

अत: $$2x + 4 = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

ध्यान दीजिए कि गुणनखंड 2 दोनों पदों में उभयनिष्ठ (सार्व) है।

देखिए, बंटन नियम द्वारा

$$2 \times (x + 2) = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

अत: हम लिख सकते हैं कि

$$2x + 4 = 2 \times (x + 2) = 2\,(x + 2)$$

इस प्रकार, व्यंजक $2x + 4$ वही है जो $2\,(x + 2)$ है। अब हम इसके गुणनखंड पढ़ सकते हैं : ये 2 और $(x + 2)$ हैं। ये गुणनखंड अखंडनीय हैं।

अब, $5xy + 10x$ के गुणनखंड कीजिए।

$5xy$ और $10x$ के अखंडनीय गुणनखंड रूप क्रमश: हैं :

$$5xy = 5 \times x \times y$$
$$10x = 2 \times 5 \times x$$

not to be republished © NCERT

ध्यान दीजिए कि दोनों पदों में 5 और x उभयनिष्ठ गुणनखंड हैं। अब,

$$5xy + 10x = (5 \times x \times y) + (5 \times x \times 2)$$
$$= (5x \times y) + (5x \times 2)$$

हम दोनों पदों को बंटन नियम द्वारा संयोजित करते हैं :

$$(5x\times y) + (5x\times 2) = 5x \times (y + 2)$$

अतः $5xy + 10x = 5x(y + 2)$ (यही वांछित गुणनखंड रूप है।)

उदाहरण 1 : $12a^2b + 15ab^2$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हम पाते हैं :

$$12a^2b = 2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times b$$
$$15ab^2 = 3 \times 5 \times a \times b \times b$$

इन दोनों पदों में 3, a और b सार्व गुणनखंड हैं

अतः
$$12a^2b + 15ab^2 = (3 \times a \times b \times 2 \times 2 \times a) + (3 \times a \times b \times 5 \times b)$$
$$= 3 \times a \times b \times [(2 \times 2 \times a) + (5 \times b)]$$
$$= 3ab \times (4a + 5b) \quad \text{(पदों को मिलाने पर)}$$
$$= 3ab\,(4a + 5b) \quad \text{(वांछित गुणनखंड रूप)}$$

उदाहरण 2 : $10x^2 – 18x^3 + 14x^4$ के गुणनखंड कीजिए।

हल :

$$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$$
$$18x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$$
$$14x^4 = 2 \times 7 \times x \times x \times x \times x$$

इन तीनों पदों में सार्व गुणनखंड 2, x और x हैं।

अतः
$$10x^2 – 18x^3 + 14x^4 = (2 \times x \times x \times 5) – (2 \times x \times x \times 3 \times 3 \times x) + (2 \times x \times x \times 7 \times x \times x)$$
$$= 2 \times x \times x \times [(5 – (3 \times 3 \times x) + (7 \times x \times x)]$$
$$= 2x^2 \times (5 – 9x + 7x^2) = \underbrace{2x^2(7x^2 - 9x + 5)} \quad \text{(तीनों पदों को मिलाने पर)}$$

क्या आप देख रहे हैं कि एक व्यंजक के गुणनखंड रूप में केवल एक ही पद होता है?

प्रयास कीजिए

गुणनखंड कीजिए :

(i) $12x + 36$ (ii) $22y – 33z$ (iii) $14pq + 35pqr$

12.2.2 पदों के पुनः समूहन द्वारा गुणनखंडन

व्यंजक $2xy + 2y + 3x + 3$ पर विचार कीजिए। आप देखेंगे कि पहले दो पदों में सार्व गुणनखंड 2 और y हैं तथा अंतिम दो पदों में सार्व गुणनखंड 3 है। परंतु सभी पदों में कोई सार्व गुणनखंड नहीं है। हम किस प्रकार प्रारंभ करेंगे?

आइए, $(2xy + 2y)$ को गुणनखंड रूप में लिखें।

$$2xy + 2y = (2 \times x \times y) + (2 \times y)$$
$$= (2 \times y \times x) + (2 \times y \times 1)$$
$$= (2y \times x) + (2y \times 1) = 2y\,(x + 1)$$

इसी प्रकार,
$$3x + 3 = (3 \times x) + (3 \times 1)$$
$$= 3 \times (x + 1) = 3\,(x + 1)$$

ध्यान दीजिए : यहाँ हमें 1 को गुणनखंड के रूप में दर्शाने की आवश्यकता है। क्यों?

अतः $$2xy + 2y + 3x + 3 = 2y\,(x + 1) + 3\,(x + 1)$$

ध्यान दीजिए कि यहाँ दाएँ पक्ष के दोनों पदों में एक सार्व गुणनखंड $(x + 1)$ है। दोनों पदों को मिलाने पर,

$$2xy + 2y + 3x + 3 = 2y\,(x + 1) + 3\,(x + 1) = (x + 1)\,(2y + 3)$$

अब, व्यंजक $2xy + 2y + 3x + 3$ गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में है। इसके गुणनखंड $(x + 1)$ और $(2y + 3)$ हैं। ध्यान दीजिए कि ये गुणनखंड अखंडनीय हैं।

पुनः समूहन (regrouping) क्या है?

मान लीजिए कि उपरोक्त व्यंजक $2xy + 3 + 2y + 3x$ के रूप में दिया है, तब इसका गुणनखंडन देखना सरल नहीं है। इसी व्यंजक को $2xy + 2y + 3x + 3$ के रूप में पुनर्व्यवस्थित करने पर, इसके $(2xy + 2y)$ और $(3x + 3)$ समूह बनाकर गुणनखंडन किया जा सकता है, यही **पुनः समूहन** है।

पुनः समूहन एक से अधिक विधियों द्वारा संभव हो सकता है। मान लीजिए कि हम उपरोक्त व्यंजक को $2xy + 3x + 2y + 3$ के रूप में पुनः समूहन करते हैं। इससे भी हम गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं। आइए, प्रयास करें :

$$\begin{aligned} 2xy + 3x + 2y + 3 &= 2 \times x \times y + 3 \times x + 2y + 3 \\ &= x \times (2y + 3) + 1 \times (2y + 3) \\ &= (2y + 3)\,(x + 1) \end{aligned}$$

गुणनखंड वही हैं (जैसा कि उन्हें होना चाहिए), यद्यपि वे विभिन्न क्रम में दिखाई दे रहे हैं।

उदाहरण 3 : $6xy - 4y + 6 - 9x$ के गुणनखंड कीजिए।

हल :

चरण 1 जाँच कीजिए कि क्या सभी पदों में कोई सार्व गुणनखंड है। यहाँ कोई नहीं है।

चरण 2 समूहन के बारे में सोचिए। ध्यान दीजिए कि पहले दो पदों में सार्व गुणनखंड $2y$ है। अतः,

$$6xy - 4y = 2y\,(3x - 2) \qquad \text{(a)}$$

अंतिम दो पदों के बारे में क्या कहा जा सकता है? उन्हें देखिए। यदि आप इनका क्रम बदलकर $-9x + 6$, लिख लें, तो गुणनखंड $(3x - 2)$ आ जाएगा।

अतः
$$\begin{aligned} -9x + 6 &= -3\,(3x) + 3\,(2) \\ &= -3\,(3x - 2) \qquad \text{(b)} \end{aligned}$$

चरण 3 (a) और (b) को एक साथ रखने पर,

$$\begin{aligned} 6xy - 4y + 6 - 9x &= 6xy - 4y - 9x + 6 \\ &= 2y\,(3x - 2) - 3\,(3x - 2) \\ &= (3x - 2)\,(2y - 3) \end{aligned}$$

इस प्रकार, $(6xy - 4y + 6 - 9x)$ के गुणनखंड $(3x - 2)$ और $(2y - 3)$ हैं।

प्रश्नावली 12.1

1. दिए हुए पदों में सार्व गुणनखंड ज्ञात कीजिए :

(i) $12x, 36$ (ii) $2y, 22xy$ (iii) $14\,pq, 28p^2q^2$

(iv) $2x, 3x^2, 4$ (v) $6\,abc, 24ab^2, 12\,a^2b$

(vi) $16\,x^3, -4x^2, 32x$ (vii) $10\,pq, 20qr, 30rp$

(viii) $3x^2\,y^3, 10x^3\,y^2, 6\,x^2\,y^2z$

2. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :

(i) $7x - 42$ (ii) $6p - 12q$ (iii) $7a^2 + 14a$

(iv) $-16\,z + 20\,z^3$ (v) $20\,l^2\,m + 30\,a\,l\,m$

(vi) $5\,x^2\,y - 15\,xy^2$ (vii) $10\,a^2 - 15\,b^2 + 20\,c^2$

(viii) $-4\,a^2 + 4\,ab - 4\,ca$ (ix) $x^2\,y\,z + x\,y^2z + x\,y\,z^2$ (तीनों पदों को मिलाने पर)

(x) $a\,x^2\,y + b\,x\,y^2 + c\,x\,y\,z$

3. गुणनखंड कीजिए :

(i) $x^2 + x\,y + 8x + 8y$ (ii) $15\,xy - 6x + 5y - 2$

(iii) $ax + bx - ay - by$ (iv) $15\,pq + 15 + 9q + 25p$

(v) $z - 7 + 7\,x\,y - x\,y\,z$

12.2.3 सर्वसमिकाओं के प्रयोग द्वारा गुणनखंडन

हम जानते हैं कि

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{(I)}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{(II)}$$

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2 \quad \text{(III)}$$

निम्नलिखित हल किए उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जाएगा कि गुणनखंडन के लिए इन सर्वसमिकाओं (identities) का किस प्रकार प्रयोग किया जा सकता है। पहले हम दिए हुए व्यंजक को देखते हैं। यदि यह उपरोक्त सर्वसमिकाओं में से किसी एक के दाएँ पक्ष के रूप का है, तो उस सर्वसमिका के बाएँ पक्ष के संगत व्यंजक से वांछित गुणनखंड प्राप्त हो जाते हैं।

उदाहरण 4 : $x^2 + 8x + 16$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : इस व्यंजक को देखिए। इसके तीन पद हैं। अतः इसमें सर्वसमिका III का प्रयोग नहीं किया जा सकता है। साथ ही, इसके पहले और तीसरे पद पूर्ण वर्ग हैं तथा बीच वाले पद का चिह्न धनात्मक है। अतः यह $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप का है, जहाँ $a = x$ और $b = 4$ हैं।

इस प्रकार, $a^2 + 2ab + b^2 = x^2 + 2\,(x)\,(4) + 4^2$

$= x^2 + 8x + 16$

क्योंकि $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,

तुलना करने पर, $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ (वांछित गुणनखंडन)

उदाहरण 5 : $4y^2 - 12y + 9$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि $4y^2 = (2y)^2$, $9 = 3^2$ और $12y = 2 \times 3 \times (2y)$

अतः $4y^2 - 12y + 9 = (2y)^2 - 2 \times 3 \times (2y) + (3)^2$

$= (2y - 3)^2$ (वांछित गुणनखंडन)

ध्यान दीजिए कि दिया हुआ व्यंजक $a^2 - 2ab + b^2$ के रूप का है, जहाँ $a = 2y$, $b = 3$ तथा $2ab = 2 \times 2y \times 3 = 12y$ हैं।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 6 : $49p^2 - 36$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : यहाँ दो पद हैं। दोनों ही पूर्ण वर्ग हैं तथा दूसरा ऋणात्मक है अर्थात् यह व्यंजक $(a^2 - b^2)$ के रूप का है। यहाँ सर्वसमिका III का प्रयोग किया जाएगा।

$$49p^2 - 36 = (7p)^2 - (6)^2$$

$$= (7p - 6)(7p + 6) \text{ (वांछित गुणनखंडन)}$$

उदाहरण 7 : $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : दिए हुए व्यंजक के पहले तीन पदों से $(a - b)^2$ प्राप्त होता है। चौथा पद एक वर्ग है। इसलिए इस व्यंजक को दो वर्गों के अंतर के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है।

इस प्रकार $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 = (a - b)^2 - c^2$ (सर्वसमिका II से)

$= [(a - b) - c)((a - b) + c)]$ (सर्वसमिका III से)

$= (a - b - c)(a - b + c)$ (वांछित गुणनखंडन)

ध्यान दीजिए कि वांछित गुणनखंडन प्राप्त करने के लिए, हमने किस प्रकार एक के बाद एक दो सर्वसमिकाओं का प्रयोग किया है।

उदाहरण 8 : $m^4 - 256$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि $m^4 = (m^2)^2$ और $256 = (16)^2$

अतः दिए हुए व्यंजक में सर्वसमिका III का प्रयोग होगा।

इसलिए $m^4 - 256 = (m^2)^2 - (16)^2$

$= (m^2 - 16)(m^2 + 16)$ [(सर्वसमिका (III)से]

अब $m^2 + 16$ के आगे गुणनखंड नहीं किए जा सकते हैं, परंतु $(m^2 - 16)$ के सर्वसमिका III के प्रयोग से और भी गुणनखंड किए जा सकते हैं।

अब $m^2 - 16 = m^2 - 4^2$

$= (m - 4)(m + 4)$

इसलिए $m^4 - 256 = (m - 4)(m + 4)(m^2 + 16)$

12.2.4 $(x + a)(x + b)$ के रूप के गुणनखंड

आइए अब चर्चा करें कि हम एक चर वाले व्यंजकों, जैसे $x^2 + 5x + 6$, $y^2 - 7y + 12$, $z^2 - 4z - 12$, $3m^2 + 9m + 6$, इत्यादि के गुणनखंड किस प्रकार कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि ये व्यंजक $(a + b)^2$ या $(a - b)^2$ के प्रकार के नहीं है, अर्थात् ये पूर्ण वर्ग नहीं हैं। उदाहरणार्थ, $x^2 + 5x + 6$ में पद 6 एक पूर्ण वर्ग नहीं है। स्पष्टतः इस प्रकार के व्यंजक $(a^2 - b^2)$ के प्रकार के भी नहीं हैं।

परंतु ये $x^2 + (a + b)x + ab$ के प्रकार के प्रतीत होते हैं। इसलिए इस प्रकार के गुणनखंड करने के लिए, हम पिछले अध्याय में अध्ययन की गई सर्वसमिका सात का प्रयोग कर सकते हैं। यह सर्वसमिका है :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad \text{(IV)}$$

इसके लिए हमें x के गुणांक (coefficient) और अचर पद को देखना होगा। आइए, निम्नलिखित उदाहरण में देखें कि ऐसा किस प्रकार किया जाता है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 9 : $x^2 + 5x + 6$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : यदि हम सर्वसमिका (IV) के दाएँ पक्ष (RHS) से $x^2 + 5x + 6$ की तुलना करें, तो हम पाएँगे कि $ab = 6$ और $a + b = 5$ है। यहाँ से हमें a और b ज्ञात करने चाहिए। तब $(x + a)$ और $(x + b)$ गुणनखंड होंगे।

यदि $ab = 6$ है, तो इसका अर्थ है कि a और b संख्या 6 के गुणनखंड हैं।

आइए, $a = 6$ और $b = 1$ लेकर प्रयास करें। इन मानों के लिए $a + b = 7$ है और 5 नहीं है। इसलिए यह विकल्प सही नहीं है।

आइए $a = 2$ और $b = 3$ लेकर प्रयास करें। इसके लिए, $a + b = 5$ है, जो ठीक वही है जो हम चाहते हैं।

तब, इस दिए हुए व्यंजक का गुणनखंड रूप $(x +2)\ (x + 3)$ है।

> व्यापक रूप में, $x^2 + px + q$ के प्रकार के बीजीय व्यंजक के गुणनखंड करने के लिए, हम q के (अर्थात् अचर पद के) दो गुणनखंड a और b इस प्रकार ज्ञात करते हैं कि
>
> $ab = q$ और $a + b = p$ हो।
>
> तब, यह व्यंजक हो जाता है : $x^2 + (a + b)\ x + ab$
>
> या $x^2 + ax + bx + ab$
>
> या $x(x + a) + b(x + a)$
>
> या $(x + a)\ (x + b)$ जो, वांछित गुणनखंड हैं।

उदाहरण 10 : $y^2 –7y +12$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि $12 = 3 \times 4$ और $3 + 4 = 7$ है।

इसलिए

$$y^2 – 7y + 12 = y^2 – 3y – 4y + 12$$
$$= y\ (y –3) – 4\ (y –3) = (y –3)\ (y – 4)$$

ध्यान दीजिए कि इस बार हमने a और b ज्ञात करने के लिए, दिए हुए व्यंजक की तुलना सर्वसमिका IV से नहीं की। पर्याप्त अभ्यास के बाद, आपको दिए हुए व्यंजकों के गुणनखंड करने के लिए उनकी तुलना सर्वसमिकाओं के व्यंजकों से करने की आवश्यकता नहीं है तथा आप सीधे ही गुणनखंड कर सकते हैं जैसा हमने ऊपर किया है।

उदाहरण 11 : $z^2 – 4z – 12$ के गुणनखंड प्राप्त कीजिए।

हल : यहाँ $a\,b = –12$ है। इसका अर्थ है कि a और b में से एक ऋणात्मक है। साथ ही, $a + b = – 4$ है। इसका अर्थ है कि बड़े संख्यात्मक मान वाला ऋणात्मक है। हम $a = – 4$ और $b = 3$; लेकर प्रयास करते हैं। परंतु यह कार्य नहीं करेगा, क्योंकि $a + b = –1$ है। इनसे अगले संभव मान $a = – 6$ और $b = 2$ हैं, तब $a + b = – 4$ है, जो हमें चाहिए।

अतः

$$z^2 – 4z –12 = z^2 – 6z + 2z –12$$
$$= z(z – 6) + 2(z – 6\ )$$
$$= (z – 6)\ (z + 2)$$

उदाहरण 12 : $3m^2 + 9m + 6$ के गुणनखंड प्राप्त कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि 3 सभी पदों का एक सार्व गुणनखंड है।

अत: $3m^2 + 9m + 6 = 3(m^2 + 3m + 2)$

अब, $m^2 + 3m + 2 = m^2 + m + 2m + 2$ (क्योंकि $2 = 1 \times 2$)

$= m(m + 1) + 2(m + 1)$

$= (m + 1)(m + 2)$

अत: $3m^2 + 9m + 6 = 3(m + 1)(m + 2)$

प्रश्नावली 12.2

1. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :

(i) $a^2 + 8a + 16$ (ii) $p^2 - 10p + 25$ (iii) $25m^2 + 30m + 9$

(iv) $49y^2 + 84yz + 36z^2$ (v) $4x^2 - 8x + 4$

(vi) $121b^2 - 88bc + 16c^2$

(vii) $(l + m)^2 - 4lm$ (संकेत : पहले $(l + m)^2$ को प्रसारित कीजिए।)

(viii) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

2. गुणनखंड कीजिए :

(i) $4p^2 - 9q^2$ (ii) $63a^2 - 112b^2$ (iii) $49x^2 - 36$

(iv) $16x^5 - 144x^3$ (v) $(l + m)^2 - (l - m)^2$

(vi) $9x^2y^2 - 16$ (vii) $(x^2 - 2xy + y^2) - z^2$

(viii) $25a^2 - 4b^2 + 28bc - 49c^2$

3. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :

(i) $ax^2 + bx$ (ii) $7p^2 + 21q^2$ (iii) $2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2$

(iv) $am^2 + bm^2 + bn^2 + an^2$ (v) $(lm + l) + m + 1$

(vi) $y(y + z) + 9(y + z)$ (vii) $5y^2 - 20y - 8z + 2yz$

(viii) $10ab + 4a + 5b + 2$ (ix) $6xy - 4y + 6 - 9x$

4. गुणनखंड कीजिए :

(i) $a^4 - b^4$ (ii) $p^4 - 81$ (iii) $x^4 - (y + z)^4$

(iv) $x^4 - (x - z)^4$ (v) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

5. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :

(i) $p^2 + 6p + 8$ (ii) $q^2 - 10q + 21$ (iii) $p^2 + 6p - 16$

12.3 बीजीय व्यंजकों का विभाजन

हम सीख चुके हैं कि बीजीय व्यंजकों को किस प्रकार जोड़ा और घटाया जाता है। हम यह भी जानते हैं कि दो व्यंजकों को किस प्रकार गुणा किया जाता है। परंतु हमने एक बीजीय व्यंजक से दूसरे व्यंजक के विभाजन पर अभी तक चर्चा नहीं की है इस अनुच्छेद में, हम यही करना चाहते हैं।

© NCERT not to be republished

आपको याद होगा कि विभाजन (division) गुणन (multiplication) की प्रतिलोम संक्रिया है। इस प्रकार, $7 \times 8 = 56$ से $56 \div 8 = 7$ या $56 \div 7 = 8$ प्राप्त होता है।

यही हम बीजीय व्यंजकों के विभाजन (या भाग देने) के लिए भी कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

(i) $2x \times 3x^2 = 6x^3$

अतः $6x^3 \div 2x = 3x^2$

तथा साथ ही, $6x^3 \div 3x^2 = 2x$

(ii) $5x\,(x + 4) = 5x^2 + 20x$

अतः $(5x^2 + 20x) \div 5x = x + 4$

तथा साथ ही, $(5x^2 + 20x) \div (x + 4) = 5x$

अब हम ध्यानपूर्वक देखेंगे कि एक व्यंजक को अन्य व्यंजक से किस प्रकार विभाजित किया जा सकता है। प्रारंभ करने के लिए, हम एक एकपदी (monomial) का एक अन्य एकपदी से विभाजन पर विचार करेंगे।

12.3.1 एकपदी का एक अन्य एकपदी से विभाजन

$6x^3 \div 2x$ पर विचार कीजिए।

हम $2x$ और $6x^3$ को अखंडनीय गुणनखंड रूपों में लिख सकते हैं :

$$2x = 2 \times x$$

$$6x^3 = 2 \times 3 \times x \times x \times x$$

अब हम $2x$ को अलग करने के लिए, $6x^3$ के गुणनखंडों के समूह बनाते हैं।

$$6x^3 = 2 \times x \times (3 \times x \times x) = (2x) \times (3x^2)$$

इस प्रकार, $6x^3 \div 2x = 3x^2$

सार्व गुणनखंडों को निरस्त करने की एक संक्षिप्त विधि वह है जो हम संख्याओं के विभाजन में करते हैं।

जैसे $$77 \div 7 = \frac{77}{7} = \frac{7 \times 11}{7} = 11$$

इसी प्रकार, $$6x^3 \div 2x = \frac{6x^3}{2x}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times x \times x \times x}{2 \times x} = 3 \times x \times x = 3x^2$$

उदाहरण 13 : निम्नलिखित विभाजन कीजिए :

(i) $-20x^4 \div 10x^2$ (ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz$

हल :

(i) $-20x^4 = -2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x$

$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$

अतः $$(-20x^4) \div 10x^2 = \frac{-2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x}{2 \times 5 \times x \times x} = -2 \times x \times x = -2x^2$$

© NCERT not to be republished

(ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz$ $$= \frac{7 \times x \times x \times y \times y \times z \times z}{2 \times 7 \times x \times y \times z}$$

$$= \frac{x \times y \times z}{2} = \frac{1}{2}xyz$$

प्रयास कीजिए

भाग दीजिए :

(i) $24xy^2z^3$ को $6yz^2$ से (ii) $63a^2b^4c^6$ को $7a^2b^2c^3$ से

12.3.2 एक बहुपद का एक एकपदी से विभाजन

आइए, एक त्रिपद (trinomial) $4y^3 + 5y^2 + 6y$ का एकपदी $2y$ से विभाजन पर विचार करें।

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = (2 \times 2 \times y \times y \times y) + (5 \times y \times y) + (2 \times 3 \times y)$$

[यहाँ, हम बहुपद (polynomial) के प्रत्येक पद को गुणनखंड के रूप में लिखते हैं।] हम पाते हैं कि $2 \times y$ दो पदों में एक सार्व गुणनखंड है साथ ही, हम इसे तीसरे पद $5y^2$ के लिए भी एक सार्व गुणनखंड के रूप में बदल सकते हैं। तब, हम प्राप्त करते हैं :

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = 2 \times y \times (2 \times y \times y) + 2 \times y \times \left(\frac{5}{2} \times y\right) + 2 \times y \times 3$$

$$= 2y\,(2y^2) + 2y\left(\frac{5}{2}y\right) + 2y\,(3)$$

$$= 2y\left(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3\right)$$ (सार्व गुणनखंड $2y$ को अलग दर्शाया गया है

अतः $(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y$

$$= \frac{4y^3 + 5y^2 + 6y}{2y} = \frac{2y(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3)}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

वैकल्पिक रूप में, हम त्रिपद के प्रत्येक पद को, निरस्तीकरण की विधि का प्रयोग करते हुए, उस एकपदी से भाग दे सकते थे :

यहाँ हम अंश में बहुपद के प्रत्येक पद को हर में एकपदी से भाग देते हैं।

$$(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y = \frac{4y^3 + 5y^2 + 6y}{2y}$$

$$= \frac{4y^3}{2y} + \frac{5y^2}{2y} + \frac{6y}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

उदाहरण 14 : उपरोक्त दोनों विधियों का प्रयोग करते हुए, $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$ को $8xyz$ से भाग दीजिए।

© NCERT not to be republished

हल : $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times [(x \times x \times y \times z) + (x \times y \times y \times z) + (x \times y \times z \times z)]$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \times y \times z \times (x + y + z)$$ (सार्व गुणनखंड बाहर लेने पर)

$$= 8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)$$

अतः $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz$

$$= \frac{8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)}{8 \times xyz} = 3 \times (x + y + z) = 3\,(x + y + z)$$

वैकल्पिक रूप में $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz = \dfrac{24x^2yz}{8xyz} + \dfrac{24xy^2z}{8xyz} + \dfrac{24xyz^2}{8xyz}$

$$= 3x + 3y + 3z = 3(x + y + z)$$

12.4 बहुपद का बहुपद से विभाजन

- $(7x^2 + 14x) \div (x + 2)$ पर विचार कीजिए।

  हर के साथ $(7x^2 + 14x)$ के गुणनखंडों की जाँच एवं मिलान करने के लिए, पहले इसके गुणनखंड करेंगे।

$$7x^2 + 14x = (7 \times x \times x) + (2 \times 7 \times x)$$

$$= 7 \times x \times (x + 2) = 7x(x + 2)$$

अब, $(7x^2 + 14x) \div (x + 2) = \dfrac{7x^2 + 14x}{x + 2}$

$$= \frac{7x(x + 2)}{x + 2} = 7x$$ (गुणनखंड $(x + 2)$ को काटने पर)

उदाहरण 15 : $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ को $11x\,(x - 8)$ से भाग दीजिए।

हल : $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$, के गुणनखंड करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) = 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 5x - 24)$$

(कोष्ठक में से सार्व गुणनखंड x^2 बाहर करने पर)

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 8x + 3x - 24)$$

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2\,[x\,(x - 8) + 3(x - 8)]$$

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2\;(x - 8)\,(x + 3)$$

अतः $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) \div 11x(x - 8)$

$$= \frac{2 \times 2 \times 11 \times x \times x \times (x + 3) \times (x - 8)}{11 \times x \times (x - 8)}$$

$$= 2 \times 2 \times x\,(x + 3) = 4x(x + 3)$$

उदाहरण 16 : $z(5z^2 - 80)$ को $5z(z + 4)$ से भाग दीजिए।

हम अंश और हर में से सार्व गुणनखंड 11, x और $(x - 8)$ को काट देते हैं।

हल : भाज्य = $z(5z^2 - 80)$

$= z[(5 \times z^2) - (5 \times 16)]$

$= z \times 5 \times (z^2 - 16)$

$= 5z \times (z + 4)(z - 4)$ [सार्वसमिका $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ को प्रयोग करने पर]

इस प्रकार, $$z(5z^2 - 80) \div 5z(z + 4) = \frac{5z(z - 4)(z + 4)}{5z(z + 4)} = (z - 4)$$

प्रश्नावली 12.3

1. निम्नलिखित विभाजन कीजिए :

(i) $28x^4 \div 56x$ (ii) $-36y^3 \div 9y^2$ (iii) $66pq^2r^3 \div 11qr^2$

(iv) $34x^3y^3z^3 \div 51xy^2z^3$ (v) $12a^8b^8 \div (-6a^6b^4)$

2. दिए हुए बहुपद को दिए हुए एकपदी से भाग दीजिए :

(i) $(5x^2 - 6x) \div 3x$ (ii) $(3y^8 - 4y^6 + 5y^4) \div y^4$

(iii) $8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3) \div 4x^2y^2z^2$ (iv) $(x^3 + 2x^2 + 3x) \div 2x$

(v) $(p^3q^6 - p^6q^3) \div p^3q^3$

3. निम्नलिखित विभाजन कीजिए :

(i) $(10x - 25) \div 5$ (ii) $(10x - 25) \div (2x - 5)$

(iii) $10y(6y + 21) \div 5(2y + 7)$ (iv) $9x^2y^2(3z - 24) \div 27xy(z - 8)$

(v) $96abc\,(3a - 12)(5b - 30) \div 144(a - 4)(b - 6)$

4. निर्देशानुसार भाग दीजिए :

(i) $5(2x + 1)(3x + 5) \div (2x + 1)$ (ii) $26xy(x + 5)(y - 4) \div 13x(y - 4)$

(iii) $52pqr\,(p + q)(q + r)(r + p) \div 104pq(q + r)(r + p)$

(iv) $20(y + 4)(y^2 + 5y + 3) \div 5(y + 4)$ (v) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \div x(x + 1)$

5. व्यंजक के गुणनखंड कीजिए और निर्देशानुसार भाग दीजिए :

(i) $(y^2 + 7y + 10) \div (y + 5)$ (ii) $(m^2 - 14m - 32) \div (m + 2)$

(iii) $(5p^2 - 25p + 20) \div (p - 1)$ (iv) $4yz(z^2 + 6z - 16) \div 2y(z + 8)$

(v) $5pq(p^2 - q^2) \div 2p(p + q)$

(vi) $12xy(9x^2 - 16y^2) \div 4xy(3x + 4y)$ (vii) $39y^3(50y^2 - 98) \div 26y^2(5y + 7)$

हमने क्या चर्चा की?

1. जब हम किसी व्यंजक का गुणनखंड करते हैं, तो हम उसे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। ये गुणनखंड, संख्याएँ, बीजीय चर या बीजीय व्यंजक हो सकते हैं।

2. एक अखंडनीय गुणनखंड वह गुणनखंड है जिसे और आगे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

3. किसी व्यंजक का गुणनखंड करने की एक क्रमबद्ध विधि सार्व गुणनखंड विधि है। इस विधि के तीन चरण होते हैं : (i) व्यंजक के प्रत्येक पद को अखंडनीय गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखिए। (ii) सार्व

© NCERT not to be republished

गुणनखंडों का पता लगाइए और उन्हें अलग कर लीजिए। (iii) प्रत्येक पद में शेष गुणनखंडों को बंटन नियम के अनुसार संयोजित कीजिए।

4. कभी–कभी एक दिए हुए व्यंजक के सभी पदों में एक सार्व गुणनखंड नहीं होता है, परंतु इन पदों के कुछ समूह इस प्रकार बनाए जा सकते हैं कि प्रत्येक समूह के सभी पदों में एक सार्व गुणनखंड होता है। जब हम ऐसा करते हैं, तो सभी समूहों में एक सार्व गुणनखंड प्रकट हो जाता है, जिससे हम व्यंजक के गुणनखंड प्राप्त कर लेते हैं। यह विधि पुन:समूहन विधि कहलाती है।

5. पुन:समूहन द्वारा गुणनखंडन में, यह याद रखना चाहिए कि व्यंजक के पदों के प्रत्येक पुन:समूहन पुन:व्यवस्था से गुणनखंड प्राप्त नहीं होते हैं। हमें व्यंजक को देखना चाहिए तथा प्रयास और भूल–विधि से वांछित पुन:समूहन प्राप्त करना चाहिए।

6. गुणनखंडन किए जा सकने वाले व्यंजकों में से अनेक $a^2 + 2\,ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$ और $x^2 + (a + b) + ab$ के रूप के होते हैं या उन्हें इस रूप में बदला जा सकता है। इन व्यंजकों के गुणनखंड अध्याय 9 में दी हुई निम्नलिखित सर्वसमिकाओं I, II, III और IV से ज्ञात किए जा सकते हैं :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

$$x^2 + (a + b)\,x + ab = (x + a)\,(x + b).$$

7. उन व्यंजकों में, जिनके गुणनखंड $(x + a)\,(x + b)$ के प्रकार के हैं, याद रखना चाहिए कि संख्यात्मक (अचर) पद से ab प्राप्त होता है। इसके गुणनखंडों a और b को इस प्रकार चुनना चाहिए कि चिह्न को ध्यान में रखते हुए, इनका योग x के गुणांक के बराबर हो।

8. हम जानते हैं कि संख्याओं की स्थिति में विभाजन, गुणा की प्रतिलोम संक्रिया होती है। यही बात बीजीय व्यंजकों के विभाजन के लिए भी लागू रहती है।

9. एक बहुपद को एक एकपदी से विभाजन की स्थिति में, हम या तो विभाजन, बहुपद के प्रत्येक पद को उस एकपदी से भाग देकर कर सकते हैं या सार्व गुणनखंड विधि से कर सकते हैं।

10. एक बहुपद को एक बहुपद से विभाजन की स्थिति में, हम भाज्य बहुपद के प्रत्येक पद को भाजक बहुपद से भाग देकर विभाजन नहीं कर सकते। इसके स्थान पर, हम प्रत्येक बहुपद के गुणनखंड करते हैं और इनमें सार्वगुणनखंडों को काट देते हैं।

11. इस अध्याय में पढ़े गए बीजीय व्यंजकों के विभाजनों की स्थिति से हमें
भाज्य = भाजक × भागफल प्राप्त होगा।
परंतु व्यापक रूप में यह संबंध निम्नलिखित है :
भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल
इस प्रकार, इस अध्याय में हमने केवल उन विभाजनों की चर्चा की है, जिनमें शेषफल शून्य है।

नोट

© NCERT
not to be republished

आलेखों से परिचय

अध्याय

13

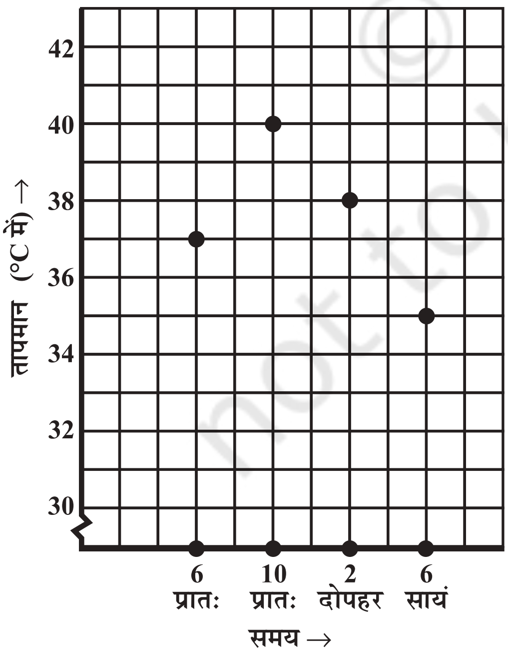
0853CH15

13.1 भूमिका

क्या आपने समाचार पत्रों, दूरदर्शन, मैगज़ीन, पुस्तकों आदि में आलेख देखें हैं? आलेखों का उद्देश्य संख्यात्मक तथ्यों को चित्रों द्वारा दिखाना है, जिससे वे शीघ्र, आसानी व स्पष्टता से समझे जा सकें। इस प्रकार आलेख, एकत्रित आँकड़ों का चित्रों द्वारा प्रदर्शन है। आँकड़ों को तालिका द्वारा भी प्रस्तुत किया जा सकता है,अपितु आलेखों द्वारा प्रदर्शन समझने में बहुत आसान होता है। आँकड़ों का **रुझान** या उनकी **तुलना** दिखाने के लिए तो ये बहुत ही उपयुक्त होते हैं। हम अब तक अनेक प्रकार के आलेख देख चुके हैं। आइए, उनको याद कर लें।

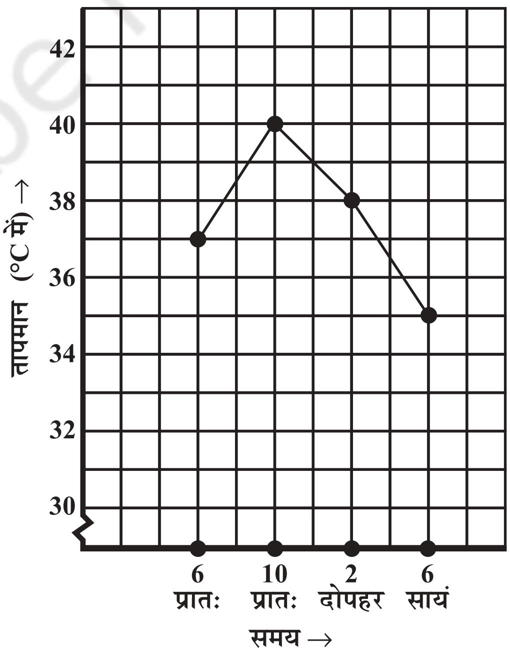
13.1.1 रेखा-आलेख

एक रेखा-आलेख, ऐसे आँकड़े प्रस्तुत करता है जो समय के साथ-साथ लगातार बदलते रहते हैं। जब रेणु बीमार पड़ी तब उसके डॉक्टर ने चार-चार घंटे बाद उसके शारीरिक तापमान का रिकॉर्ड बनाया। यह एक आलेख के रूप में था (आकृति 13.1 व 13.2 में देखें)।



आकृति 13.1

हर आँकड़े को वर्गांकित कागज़ पर एक बिंदु द्वारा अंकित किया गया है।



आकृति 13.2

बाद में बिंदुओं को रेखाखंडों से मिला दिया गया है। परिणाम, यह **रेखा आलेख** है।

© NCERT not to be republished

हम इसे 'समय-तापमान' का आलेख कह सकते हैं।
यह निम्न तालिका में दिए गए आँकड़ों का चित्र रूप में प्रदर्शन है।

समय	6 बजे प्रातः	10 बजे प्रातः	2 बजे दोपहर	6 बजे सायं
तापमान (°C में)	37	40	38	35

क्षैतिज रेखा (जिसे x-अक्ष भी कहते हैं) वे समय दिखाती है, जब-जब तापमान लिया गया। ऊर्ध्वाधर रेखा (जिसे y-अक्ष भी कहते हैं) पर क्या दिखाया गया है?

यह आलेख आपको क्या-क्या बताता है? उदाहरण के लिए, आप इसमें तापमान के प्रारूप देख सकते हैं : 10 बजे प्रातः अधिक था फिर 6 बजे सायं तक घटता गया। ध्यान दीजिए 6 बजे प्रातः और 10 बजे प्रातः के बीच तापमान 3°C (40°C – 37°C) बढ़ा।

8 बजे प्रातः तापमान नहीं पढ़ा गया फिर भी आलेख देखकर लगता है कि यह 37°C से अधिक था। (कैसे?)

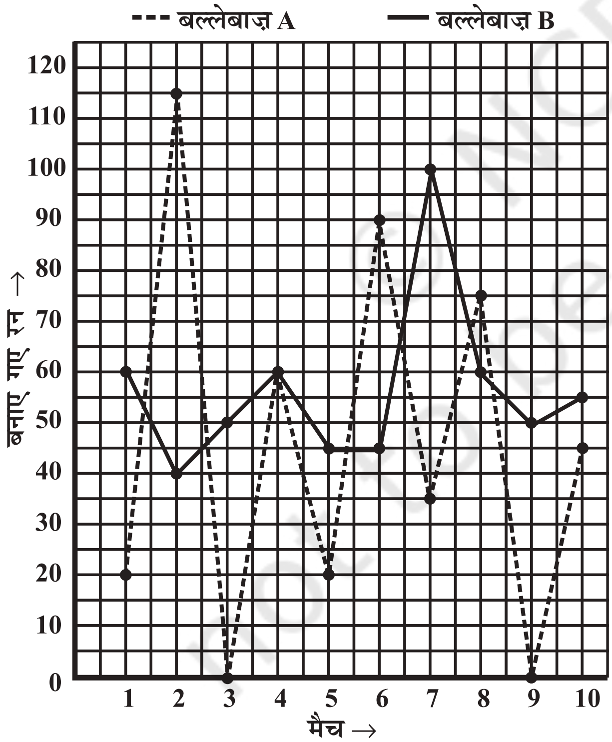
उदाहरण 1 : दिया गया आलेख (आकृति 13.3) वर्ष 2007 में, दो बल्लेबाजों A तथा B द्वारा खेले गए 10 मैचों में बनाए गए रनों को प्रदर्शित करता है। आलेख का अध्ययन कीजिए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) दोनों अक्ष-रेखाओं पर क्या-क्या सूचना दी गई है?

(ii) कौन सी रेखा बल्लेबाज़ A द्वारा बनाए गए रन प्रदर्शित करती है।

(iii) वर्ष 2007 में, क्या किसी मैच में दोनों बल्लेबाज़ों द्वारा बनाए गए रन समान थे? यदि हाँ, तो किस मैच में?

(iv) दोनों बल्लेबाज़ों में कौन अधिक स्थिर है? आपने यह निर्णय कैसे लिया?



आकृति 13.3

हल :

(i) क्षैतिज अक्ष (या x-अक्ष), वर्ष 2007 में खेले गए मैचों की संख्या प्रकट करती है।

ऊर्ध्वाधर अक्ष (या y-अक्ष) प्रत्येक मैच में बनाए गए रनों की संख्या प्रकट करती है।

(ii) बिंदुयुक्त रेखा A बल्लेबाज़ द्वारा बनाए गए रनों को दर्शाती है जैसा आलेख के ऊपर संकेत भी है।

(iii) चौथे मैच के दौरान दोनों ने एक समान 60 रन बनाए। (यह उस बिंदु से पता चलता है, जहाँ पर दोनों रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं।

(iv) बल्लेबाज़ A के आलेख में एक ऊँचा शिखर है तथा अनेक नीची घाटियाँ। वह रन बनाने में स्थिर नहीं है। जबकि दूसरी ओर, बल्लेबाज़ B ने कभी 40 से कम रन नहीं बनाए;

यद्यपि उसने B के 115 के मुकाबले अधिकतम 100 ही रन बनाए। A ने दो मैचों में शून्य रन ही बनाए तथा कुल पाँच मैचों में 40 से कम। क्योंकि A द्वारा बनाए गए रनों में अधिक उतार-चढ़ाव है, अत: B ही एक विश्वसनीय व स्थिर बल्लेबाज़ है।

उदाहरण 2 : एक कार एक शहर P से दूसरे शहर Q की ओर जा रही है जो एक दूसरे से 350 km दूरी पर हैं। दिया गया आलेख (आकृति 13.4) विभिन्न समयों पर कार की P शहर से दूरियाँ दर्शाता है। आलेख अध्ययन कर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) दोनों अक्षों पर क्या-क्या दर्शाया गया है?

(ii) कार ने किस समय और कहाँ से यात्रा आरंभ की?

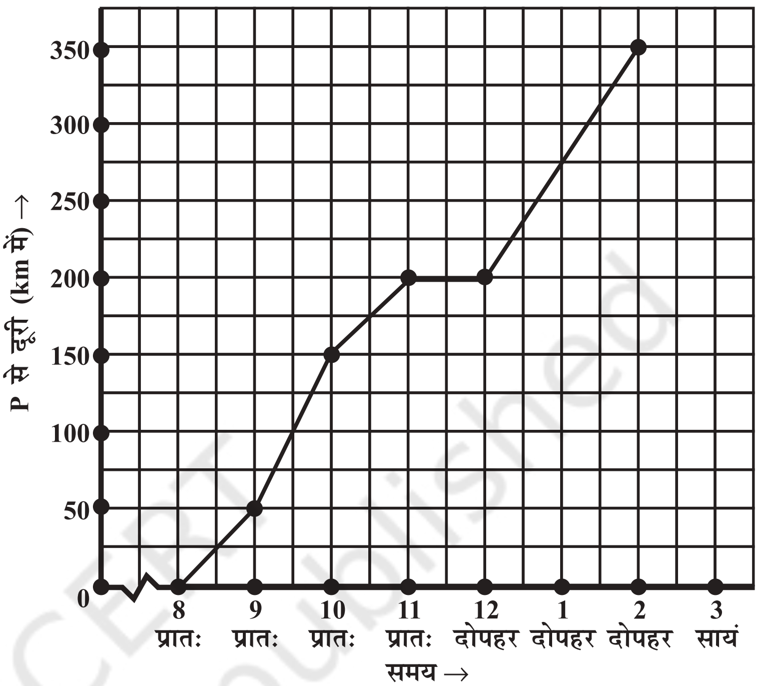
(iii) पहले घंटे में कार कितनी दूर चली?

(iv) दूसरे घंटे तथा तीसरे घंटे में कार ने कितनी-कितनी दूरियाँ तय की?

(v) क्या पहले तीन घंटों में कार की चाल समान थी? आपने कैसे जाना?

(vi) क्या कार कभी किसी स्थान पर रुकी? अपने उत्तर के लिए तर्क भी दीजिए।

(vii) कार, शहर Q पर किस समय पहुँची?



आकृति 13.4

हल :

(i) क्षैतिज (x) अक्ष समय दर्शाता है। ऊर्ध्वाधर (y) अक्ष, P शहर से कार की दूरियाँ दर्शाता है।

(ii) कार 8 बजे प्रात: शहर P से चली।

(iii) कार ने पहले घंटे में 50 km की दूरी तय की। (आप यह देख सकते हैं कि कार प्रात: 8 बजे शहर P से चली और प्रात: 9 बजे, आलेख के अनुसार, 50 km की दूरी पर थी। अत: प्रात: 8 और 9 बजे के बीच, एक घंटे में कार ने 50 km दूरी तय की।

(iv) (a) कार ने दूसरे घंटे (प्रात: 9 बजे से 10 बजे) में 100 km दूरी (150–50) तय की।

(b) कार ने तीसरे घंटे (प्रात: 10 बजे से 11 बजे) में 50 km की दूरी (200–150) तय की।

(v) प्रश्न (iii) व (iv) के उत्तरों से पता चलता है कि कार की चाल सदैव समान नहीं थी। (आलेख यह भी दर्शाता है कि चाल किस प्रकार बदली।)

(vi) आलेख में हम देखते हैं कि कार प्रात: 11 बजे और 12 बजे भी शहर P से 200 km दूर थी। इस अंतराल में तय की गई दूरी, एक क्षैतिज रेखाखंड है जो इस तथ्य की पुष्टि करता है।

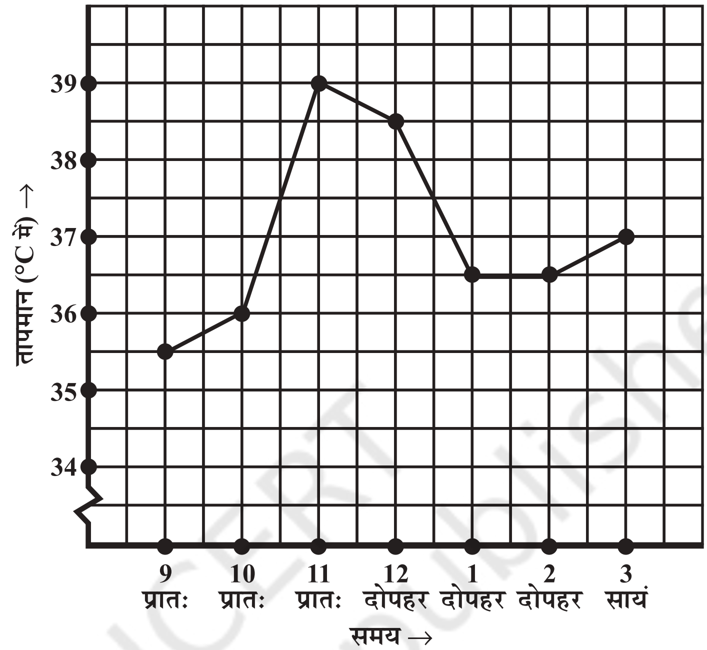
(vii) 2 बजे दोपहर कार Q शहर पहुँची।

प्रश्नावली 13.1

1. निम्न आलेख, किसी अस्पताल में एक रोगी का प्रति घंटे लिया गया तापमान दर्शाता है:

(a) रोगी का तापमान 1 बजे दोपहर क्या था?

(b) रोगी का तापमान 38.5° C कब था?



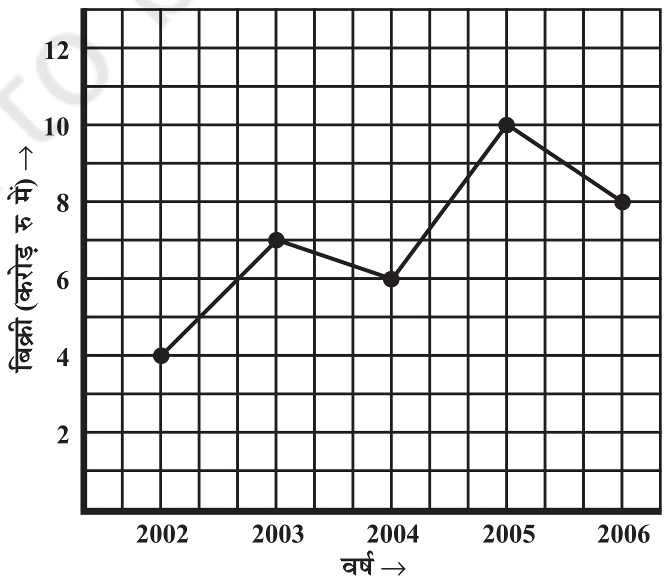
(c) इस पूरे अंतराल में रोगी का तापमान दो बार एक समान ही था। ये दो समय, क्या-क्या थे?

(d) 1.30 बजे दोपहर रोगी का तापमान क्या था? इस निष्कर्ष पर आप कैसे पहुँचे?

(e) किन अंतरालों में रोगी का तापमान 'बढ़ने का रुझान' दर्शाता है।

2. एक निर्माता कंपनी की विभिन्न वर्षों में की गई बिक्री निम्न आलेख द्वारा दर्शाई गई है:

(a) (i) वर्ष 2002 में (ii) वर्ष 2006 में कितनी बिक्री थी?



© NCERT not to be republished

(b) (i) वर्ष 2003 में (ii) वर्ष 2005 में कितनी बिक्री थी?

(c) वर्ष 2002 तथा वर्ष 2006 की बिक्रियों में कितना अंतर था?

(d) किस अंतराल में बिक्रियों का यह अंतर सबसे अधिक था?

3. वनस्पति-विज्ञान के एक प्रयोग में, समान प्रयोगशाला परिस्थितियों में दो पौधे A तथा B उगाए गए। तीन सप्ताहों तक उनकी ऊँचाइयों को हर सप्ताह के अंत में मापा गया। परिणामों को निम्न आलेख में दर्शाया गया है :

(a) (i) 2 सप्ताह बाद (ii) 3 सप्ताह बाद पौधे A की ऊँचाई कितनी थी?

(b) (i) 2 सप्ताह बाद (ii) 3 सप्ताह बाद पौधे B की ऊँचाई कितनी थी?

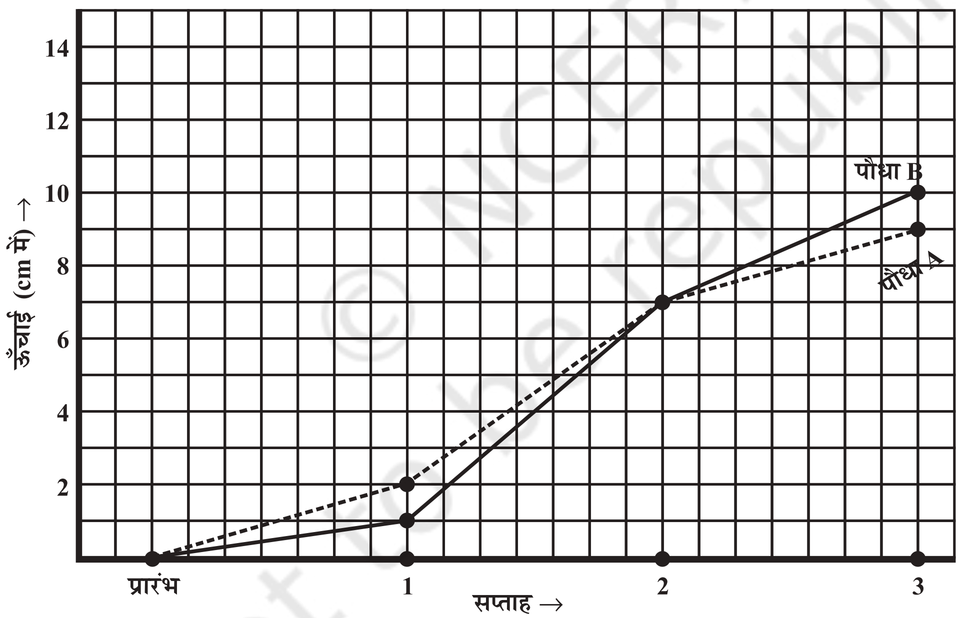
(c) तीसरे सप्ताह में पौधे A की ऊँचाई कितनी बढ़ी?

(d) दूसरे सप्ताह के अंत से तीसरे सप्ताह के अंत तक पौधे B की ऊँचाई कितनी बढ़ी?

(e) किस सप्ताह में पौधे A की ऊँचाई सबसे अधिक बढ़ी?

(f) किस सप्ताह में पौधे B की ऊँचाई सबसे कम बढ़ी?

(g) क्या किसी सप्ताह में दोनों पौधों की ऊँचाई समान थी? पहचानिए।



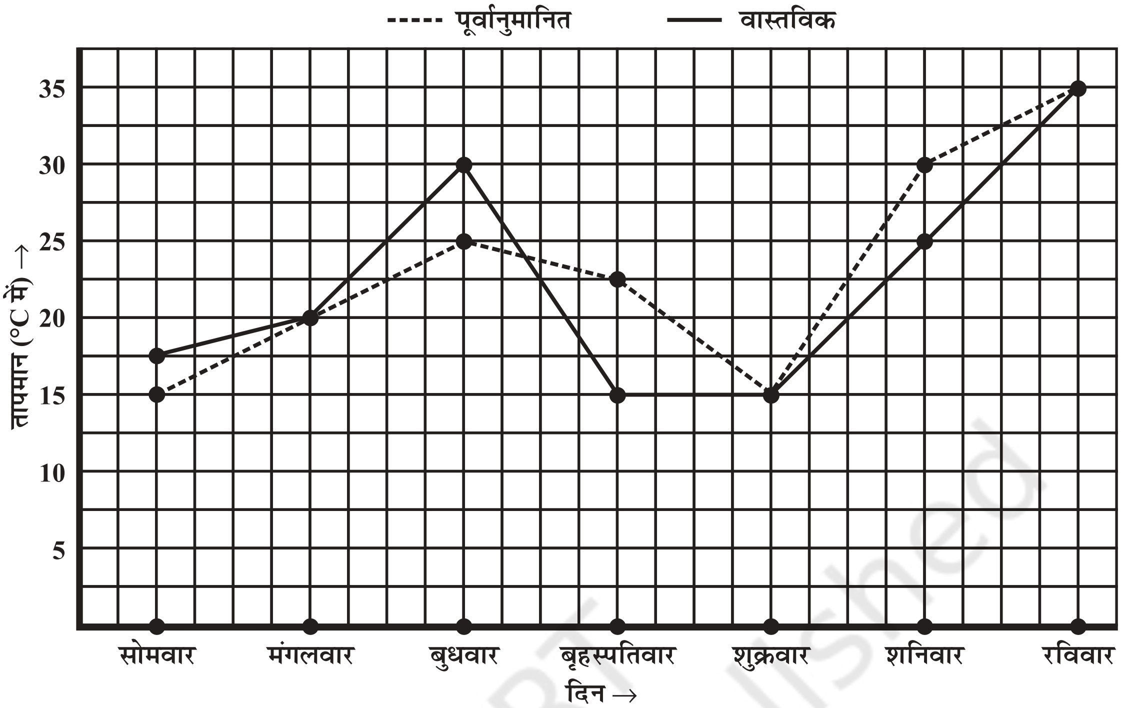
4. निम्न आलेख, किसी सप्ताह के प्रत्येक दिन के लिए पूर्वानुमानित तापमान तथा वास्तविक तापमान दर्शाता है :

(a) किस दिन पूर्वानुमानित तापमान व वास्तविक तापमान समान था?

(b) सप्ताह में पूर्वानुमानित अधिकतम तापमान क्या था?

(c) सप्ताह में वास्तविक न्यूनतम तापमान क्या था?

(d) किस दिन वास्तविक तापमान व पूर्वानुमानित तापमान में अंतर सर्वाधिक था?



5. निम्न तालिका प्रयोग कर एक रैखिक आलेख बनाइए :

(a) विभिन्न वर्षों में किसी पर्वतीय नगर में हिमपात के दिनों की संख्या :

वर्ष	2003	2004	2005	2006
दिन	8	10	5	12

(b) विभिन्न वर्षों में एक गाँव में, पुरुषों व स्त्रियों की संख्या (हज़ारों में)

वर्ष	2003	2004	2005	2006	2007
पुरुषों की संख्या	12	12.5	13	13.2	13.5
स्त्रियों की संख्या	11.3	11.9	13	13.6	12.8

6. एक डाकिया किसी नगर के पास ही स्थित एक उपनगर में एक व्यापारी को पार्सल पहुँचाने के लिए साइकिल पर जाता है। विभिन्न समयों पर नगर से उसकी दूरियाँ निम्न आलेख द्वारा दर्शाई गई हैं।

(a) x-अक्ष पर समय दर्शाने के लिए क्या पैमाना प्रयोग किया गया है?

(b) उसने पूरी यात्रा के लिए कितना समय लिया?

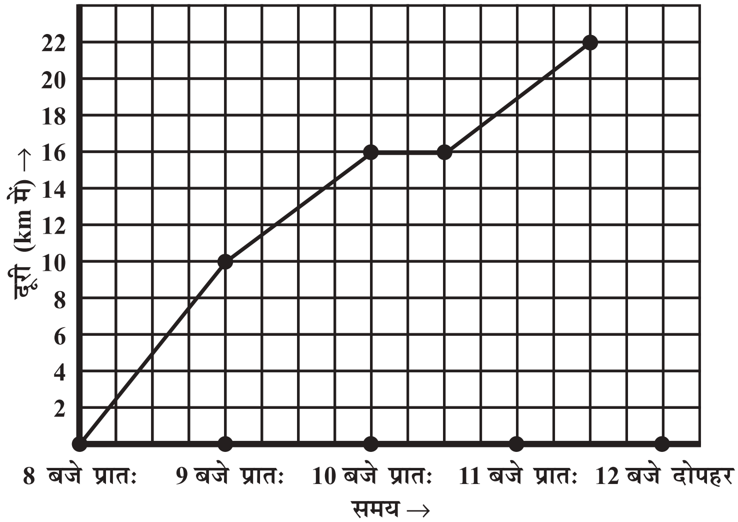
(c) व्यापारी के स्थान की नगर से दूरी कितनी है?

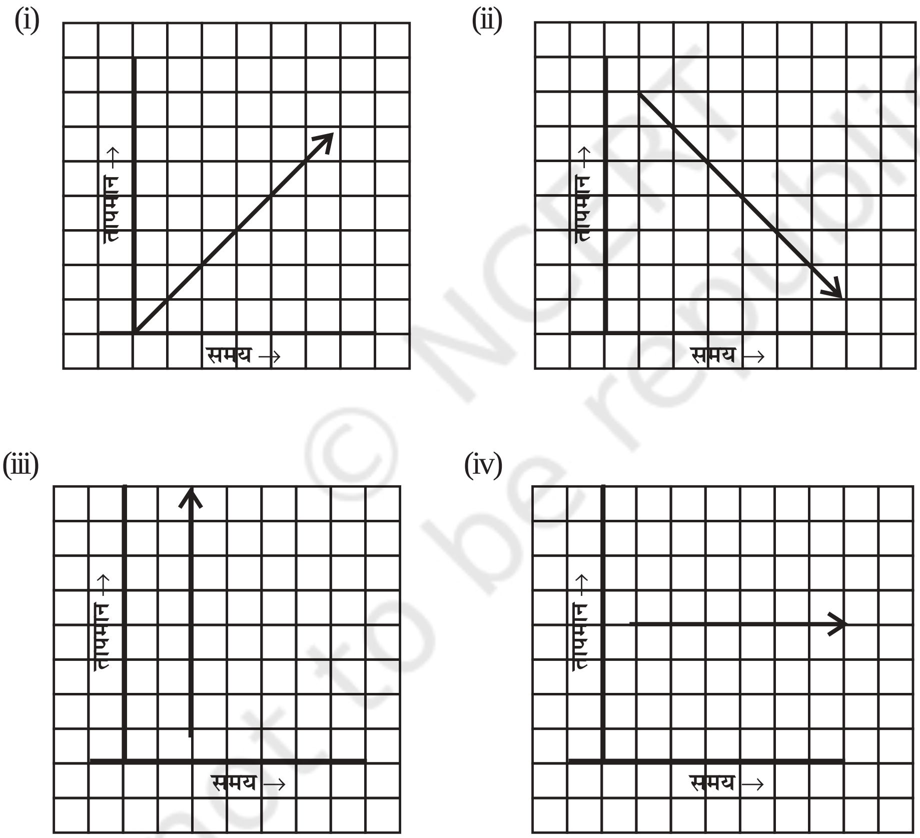
(d) क्या, डाकिया रास्ते में कहीं रुका? विवरण दीजिए।

(e) किस अंतराल में उसकी चाल सबसे अधिक थी?

7. निम्न आलेखों में कौन-कौन से आलेख समय व तापमान के बीच संभव हैं? तर्क के साथ अपने उत्तर दीजिए।

© NCERT not to be republished





13.2 कुछ अनुप्रयोग

दैनिक जीवन में आपने देखा होगा कि किसी भी सुविधा का जितना अधिक उपयोग आप करते हैं उतना ही अधिक उसके लिए मूल्य देना होता है। अगर आप बिजली अधिक खर्च करते हैं तब आपको बिल भी अधिक देना होगा। अगर आप बिजली कम खर्च करते हैं तो बिल भी कम आएगा। यह एक उदाहरण है जहाँ एक राशि दूसरी को प्रभावित करती है। बिजली का बिल,

उपयोग की गई बिजली की मात्रा पर निर्भर करता है। हम कहते हैं कि बिजली की मात्रा एक मुक्त या स्वतंत्र चर है जब कि बिजली का बिल एक **आश्रित चर** है। ऐसी राशियों के संबंध को हम आलेख द्वारा भी प्रदर्शित कर सकते हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

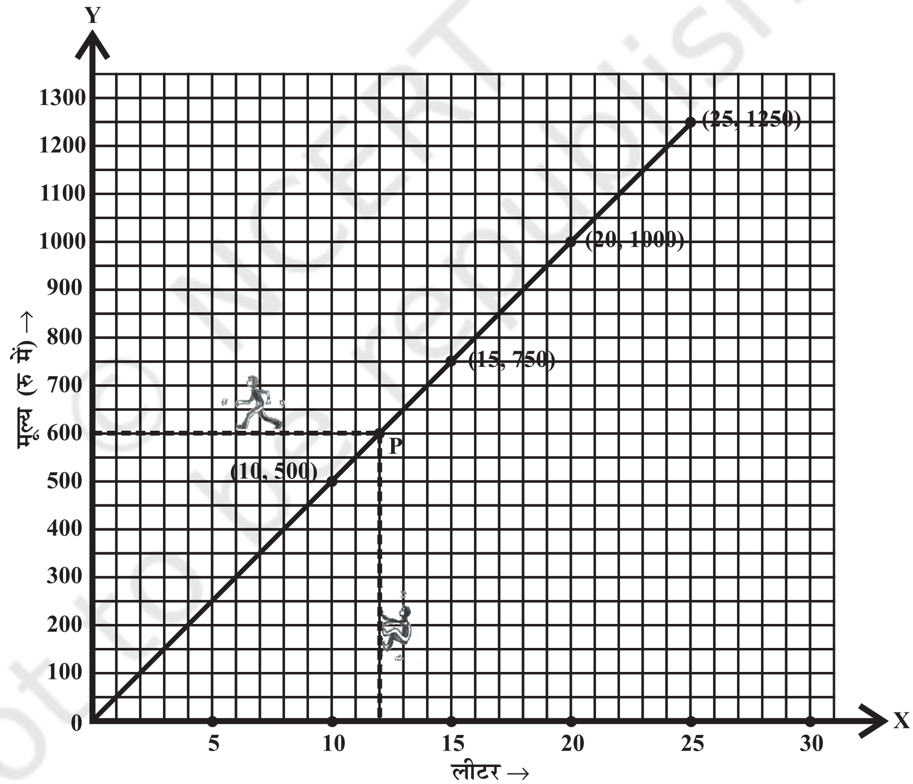
एक कार की पेट्रोल टंकी को भरने के लिए दी गई राशि खरीदे गए पेट्रोल की मात्रा (लीटर में) द्वारा निश्चित होती है। यहाँ पर कौन सा चर स्वतंत्र है? चर्चा कीजिए।

उदाहरण 3 : (मात्रा तथा मूल्य) निम्न तालिका पेट्रोल की मात्राएँ व उसके मूल्य बताती है:

पेट्रोल की मात्रा (लीटर में)	10	15	20	25
पेट्रोल का मूल्य (रुपयों में)	500	750	1000	1250

इन आँकड़ों को दर्शाने के लिए आलेख बनाइए।

हल :



आकृति 13.5

(i) आइए, दोनों अक्षों के लिए (आकृति 13.5) उपयुक्त पैमाना चुनें।

(ii) क्षैतिज अक्ष पर पेट्रोल की मात्रा दर्शाते हैं।

(iii) ऊर्ध्वाधर अक्ष पर मूल्य दर्शाते हैं।

(iv) (10, 500) , (15, 750), (20, 1000) तथा (25, 1250) बिंदुओं को अंकित करें।

(v) बिंदुओं को मिलाइए।

not to be republished © NCERT

हम देखते हैं कि आलेख एक सरल रेखा है। (यह एक रैखिक आलेख है) यह आलेख मूल बिंदु से क्यों गुज़रता है? इसके बारे में सोचिए।

यह आलेख हमें कुछ तथ्यों के अनुमान लगाने में सहायक हो सकता है। मान लीजिए, हम जानना चाहते हैं कि 12 लीटर पेट्रोल के लिए कितना मूल्य देना होगा?

क्षैतिज अक्ष पर 12 की स्थिति देखिए। 12 के चिह्न पर ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुकूल चलकर आलेख को बिंदु P पर मिलते हैं।

बिंदु P से क्षैतिज रेखा के अनुकूल चलकर ऊर्ध्वाधर अक्ष पर पहुँचते हैं जहाँ हमें वह बिंदु मिलता है, जो ₹ 600 उत्तर दर्शाता है।

यह आलेख एक ऐसी स्थिति का है, जिसमें दो राशियाँ समानुपात में हैं। कैसे? ऐसी स्थितियों में, आलेख सदैव रैखिक ही होते हैं।

प्रयास कीजिए

ऊपर के उदाहरण में, आलेख से ज्ञात कीजिए कि ₹ 800 में कितना पेट्रोल खरीदा जा सकता है?

उदाहरण 4 : (मूलधन तथा साधारण ब्याज)

एक बैंक वरिष्ठ नागरिकों को उनके जमा धन पर 10% साधारण ब्याज देता है। जमा धन तथा उस पर अर्जित वार्षिक साधारण ब्याज के संबध को दर्शाने के लिए एक आलेख खींचिए। इस आलेख से निम्न ज्ञात कीजिए :

(a) ₹ 250 जमा करने पर प्राप्त ब्याज।

(b) ₹ 70 ब्याज प्राप्त करने के लिए कितना धन जमा करना होगा?

जमा धन	1 वर्ष के लिए साधारण ब्याज
₹ 100	$\frac{100 \times 1 \times 10}{100}$ = ₹ 10
₹ 200	$\frac{200 \times 1 \times 10}{100}$ = ₹ 20
₹ 300	$\frac{300 \times 1 \times 10}{100}$ = ₹ 30
₹ 500	$\frac{500 \times 1 \times 10}{100}$ = ₹ 50
₹ 1000	₹ 100

उपयुक्त चरण :

1. अंकित की जाने वाली राशियाँ जमा धन तथा उससे अर्जित ब्याज ज्ञात कीजिए।
2. x-अक्ष तथा y-अक्ष पर दर्शाई जाने वाली राशियाँ निर्धारित कीजिए।
3. उपयुक्त पैमाने चुनिए।
4. बिंदु अंकित कीजिए।
5. बिंदुओं को मिलाइए।

इन राशियों से निम्न तालिका प्राप्त होती है :

जमा धन (₹ में)	100	200	300	500	1000
वार्षिक सा० ब्याज (₹ में)	10	20	30	50	100

© NCERT not to be republished

(i) पैमाना : क्षैतिज अक्ष पर 1 इकाई = ₹ 100
ऊर्ध्वाधर अक्ष पर 1 इकाई = ₹ 10

(ii) जमा धन को क्षैतिज अक्ष पर दर्शाते हैं।

(iii) साधारण ब्याज ऊर्ध्वाधर अक्ष पर दर्शाते हैं।

(iv) (100, 10), (200, 20), (300, 30), (500, 50) तथा (1000, 100) बिंदुओं को अंकित कीजिए।

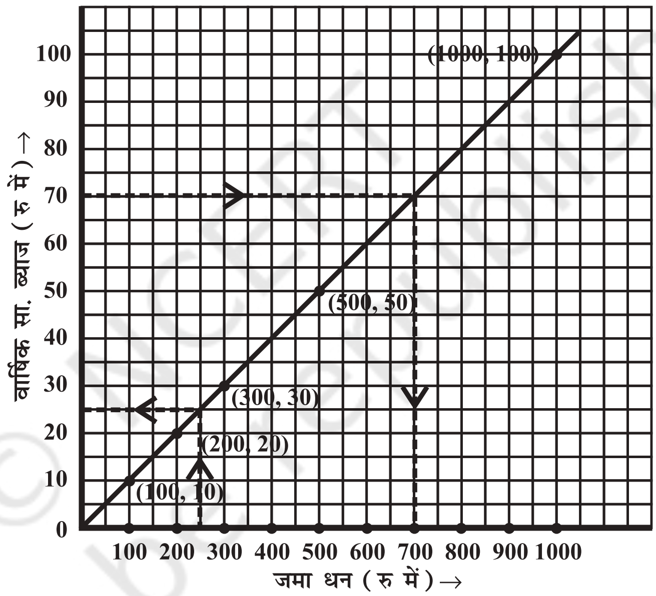
(v) बिंदुओं को मिलाइए। हमें आलेख में एक सरल रेखा प्राप्त होती है; (आकृति 13.6)।

(a) क्षैतिज अक्ष पर ₹ 250 मूलधन के लिए ऊर्ध्वाधर अक्ष पर ₹ 25 साधारण ब्याज है।

(b) ऊर्ध्वाधर अक्ष पर ₹ 70 ब्याज के लिए क्षैतिज अक्ष पर ₹ 700 मूलधन है।

प्रयास कीजिए

क्या उदाहरण 7 एक समानुपात का उदाहरण है?



आकृति 13.6

उदाहरण 5 : (समय और दूरी) अजीत लगातार 30 km/hour की गति से स्कूटर चलाता है। इस स्थिति के लिए समय-दूरी के बीच एक आलेख खींचिए। इस आलेख से ज्ञात कीजिए :

(i) अजीत को 75 किमी दूरी तय करने में लगने वाला समय।

(ii) अजीत द्वारा $3\frac{1}{2}$ घंटे में तय की गई दूरी।

हल :

यात्रा के घंटे	तय की गई दूरी
1 घंटा	30 km
2 घंटे	2 × 30 = 60 km
3 घंटे	3 × 30 = 90 km
4 घंटे	4 × 30 = 120 km

इन राशियों से निम्न तालिका प्राप्त होती है :

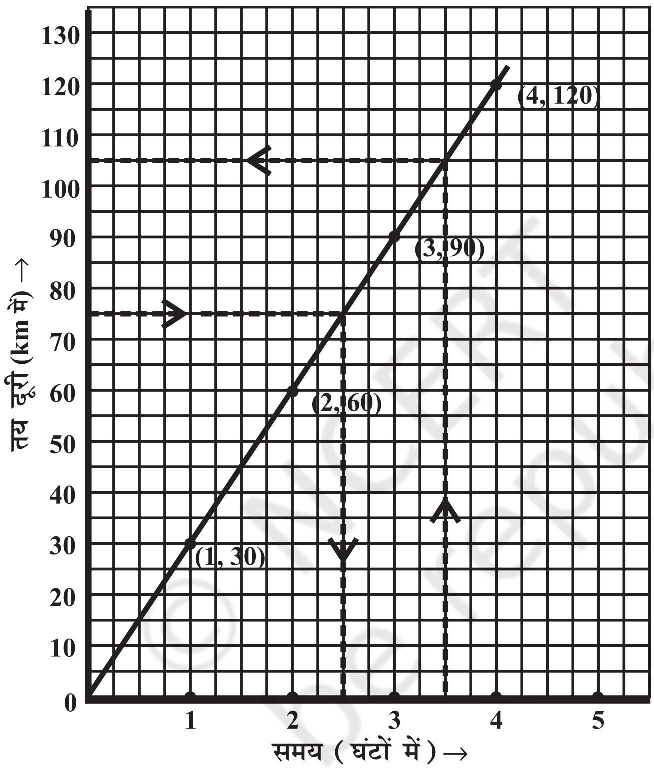
समय (घंटों में)	1	2	3	4
तय की गई दूरी (km में)	30	60	90	120

(i) पैमाना : क्षैतिज अक्ष, 2 इकाई = 1 घंटा

ऊर्ध्वाधर अक्ष, 1 इकाई = 10 km

(ii) क्षैतिज अक्ष पर समय दर्शाते हैं।

(iii) ऊर्ध्वाधर अक्ष दूरी दर्शाते हैं।



आकृति 13.7

(iv) (1, 30), (2, 60), (3, 90) तथा (4, 120) बिंदुओं को अंकित कीजिए।

(v) बिंदुओं को मिलाइए। हमें एक रैखिक आलेख प्राप्त होता है; (आकृति 15.18)।

(a) ऊर्ध्वाधर अक्ष पर 75 km दूरी लेने पर, उसके अनुरूप क्षैतिज अक्ष पर 2.5 घंटे लगेंगे।

(b) क्षैतिज अक्ष पर $3\frac{1}{2}$ घंटे के अनुरूप ऊर्ध्वाधर अक्ष पर दूरी 105 km मिलती है।

प्रश्नावली 13.2

1. उपयुक्त पैमाने प्रयोग करते हुए, निम्न तालिकाओं में दी गई राशियों के लिए आलेख बनाइए :

(a) सेबों का मूल्य

सेबों की संख्या	1	2	3	4	5
मूल्य (₹ में)	5	10	15	20	25

(b) कार द्वारा तय की गई दूरी

समय (घंटों में)	6 बजे प्रात:	7 बजे प्रात:	8 बजे प्रात:	9 बजे प्रात:
दूरी (km में)	40	80	120	160

(i) 7.30 बजे प्रात: व 8 बजे प्रात: के अंतराल में कार द्वारा कितनी दूरी तय की गई?

(ii) कार के 100 km दूरी तय कर लेने पर समय क्या था?

(c) जमा धन पर वार्षिक ब्याज

जमा धन (₹ में)	1000	2000	3000	4000	5000
सा० ब्याज (₹ में)	80	160	240	320	400

(i) क्या आलेख मूल बिंदु से गुज़रता है?

(ii) आलेख से ₹ 2500 का वार्षिक ब्याज ज्ञात कीजिए।

(iii) ₹ 280 ब्याज प्राप्त करने के लिए कितना धन जमा करना होगा?

2. निम्न तालिकाओं के लिए आलेख खींचिए।

(i)

वर्ग की भुजा (cm में)	2	3	3.5	5	6
परिमाप (cm में)	8	12	14	20	24

क्या यह रैखिक आलेख है?

(ii)

वर्ग की भुजा (cm में)	2	3	4	5	6
क्षेत्रफल (cm^2 में)	4	9	16	25	36

क्या यह रैखिक आलेख है?

हमने क्या चर्चा की?

1. आलेखीय चित्रण समझना सरल होता है।

2. रेखा-आलेख जो एक पूर्ण अखंडित रेखा हो, एक **रैखिक आलेख** कहलाता है।

3. वर्गांकित कागज़ पर किसी बिंदु की स्थिति निर्धारित करने के लिए हमें x-**निर्देशांक** तथा y-**निर्देशांक** चाहिए।

4. एक **स्वतंत्र चर** तथा **आश्रित चर** में संबंध एक आलेख द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

not to be republished © NCERT